空間・時間・物質

Raum, Zeit, Materie

Math & Science

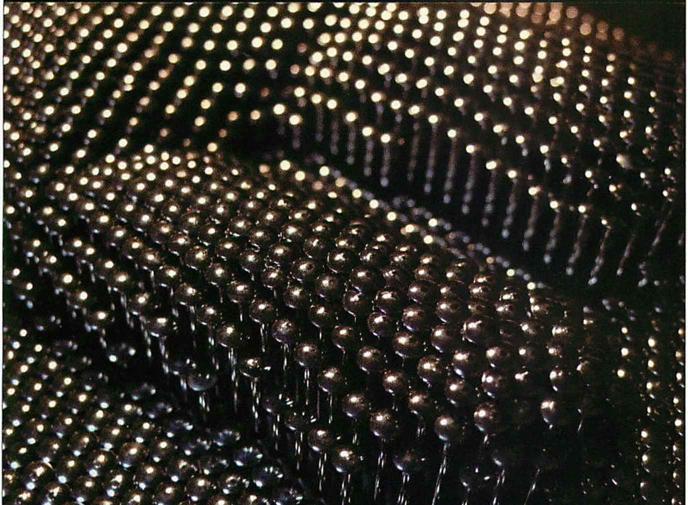
上

ヘルマン・ワイル

Hermann Weyl

内山龍雄◎訳

Ryoyu Uchiyama



ちくま学芸文庫

ちくま学芸文庫

空間・時間・物質 上

ヘルマン・ワイル
内山龍雄 訳

筑摩書房

Raum · Zeit · Materie

Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie

von Hermann Weyl

Julius Springer, 1923

目　次

注意：数式番号は各章ごとに（1）からはじめてその章の終わりまで通し番号をつけた．文中，式の番号が引用された場合，特に注意がないかぎり，それは同じ章の式の番号を示すものとする．

下巻目次

空間・時間・物質　上

第5版への序文

アインシュタインの相対性理論によって宇宙に対する人間の思索は新しい段階に到達した．それはあたかも，現実をわれわれから遮断していた壁が突然うちくだかれたような観がある．知識を追い求めるわれわれの眼の前には，われわれがいまだかつて予想すらしなかった広大な，深遠な可能性が展開された．われわれは今日，力づよい足どりで，物理的諸現象に内在する道理の把握になお一層近づいた．

本書は，1917年の夏学期に，国立チューリッヒ高等工業学校で私が行なった講義をもとにして書かれたものである．その初版は1918年の春に出版された．本書をだすにいたったのは，この偉大な相対性理論という課題をかりて，哲学的，数学的ならびに物理学的思考が互いに浸透し合うことのひとつの例を示したいという願望が私の心を強く誘ったからである．最初は，相対性理論は，日々，積分とか場の強さといったようなものばかりを扱っている専門家のあいだでのみ知られているにすぎなかった．しかしその後，この理論は，科学的な理論には珍しく，一般的に有名となり，また熱烈な，必ずしも本質的な根拠にもとづかない礼賛の対象となった．その際，幾多のさほど好ましか

らざる傾向がおこったにもかかわらず，あるいはまた常識に対して相対性理論がたちむかった問題について，一般の信奉者の現実の理解がどの程度のものかについて詳しく検討したわけではないが，深い認識論的問題が，大変評判のよくないわれわれ同時代の人々の間に活発な興味をまきおこすことができたことは，全体的にみれば，ひとつの非常に喜ぶべき事実であると私には思われる．理論に対する人気や批判は，ともに理論自身になんらの影響をもあたえない．両者は単に理論の思考上の構造を常に，より以上簡単な，またより一層わかりやすいものにさせるという結果を導くにすぎない．近年，相対性理論に関する文献の数は急増し，とても全部に目をやることは不可能なくらいである．数学的ならびに物理学的予備教育のすべての段階において，今日ではよい説明書が多数ある．ここでは，私はドイツ語でかかれた書物のうちで，広い範囲にわたって改良されたボルンの立派な著書“アインシュタインの相対性理論およびその物理学的基礎”（“Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen”第 3 版，1922，Julius Springer）を挙げたい．また Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften（V.19）にある W. パウリの卓越した論文を推奨する．これらの書物とならんで，相対性理論に対する系統的な研究について述べた本書もなお，その価値を持ちつづけることを私は切望する．本書でも，相対性理論の成果について述べる前に，テンソル解析という厄介なことを述べねばならなかったが，それにもかかわらず，

多くの人々が本書を読まれるよう希望する．

本書の内容の配置については，この第5版でも，これまでと同じで，何の変更もしてない．私の意図したことは，単に相対性理論の解説にとどまらず，空間および時間の全問題について，それが数学ならびに物理学の歴史の中でいかに発展してきたかをここに繰りひろげてみせることであった．それゆえ，常にまず数学の議論から話がはじまっている！　特に第II章は単なる数学的準備と考えてはならない．むしろそれは本書の主題そのものを扱っている．さらにそこでは，一般的な概念から出発して，理論の概念的に厳密な理解，さらに個々の問題への具体的応用にまで一歩一歩と移行するのに必要な道具がすべて与えられている．それにもかかわらず，“物理学は経験的基礎を提供し，数学は単なる鋭敏な道具であり，すべては思索的分析に依存する”という哲学的基本態度を本書は否定するものではない．この第5版ではこのような傾向が，旧版よりはいくぶん，強化されている．模索的思考は本書では削除されたが，理論の支えとなっている基本的な考えについては，より直観的に，慎重に，また完全に分析され，展開されている．特につぎの部分に注意してもらいたい：平行移動と曲率について述べた新設の§ 12，特殊ならびに一般相対性理論の基礎に対するより厳密な分析を行なった§23と§29．特に力学はまったく新しい形で導かれている（§§27，37，38)．最後に，本書では，今日のわれわれの知識が許す範囲で，運動の問題をできるかぎり明快に理解しようと試みた

(§§36, 39). 物体の慣性の起源が世界の質量にあるということは宇宙論から導かれるべきものであるが，相対性理論はその最初から，自己をこのような宇宙論と不可分の形で結びつける点で誤りをおかしたように思われる．なんとなれば，この慣性の起源は，ひとつの仮説であり，今日でもその説が首尾一貫したものであることを証明できない．また一般相対性理論の立場にたつとき2個の物体のあいだの相対運動が，ただ1個の物体の絶対運動におとらず，意味のないものであるということは必ずしも満足なものとは思えない．アインシュタインの理論の本来の物理学的内容を私はつぎのように公式化したい：物体の運動は**力**と**慣性**のあいだの闘いによって力学的に実現される．慣性場は物質との間に相互作用をもつひとつの実在である．重力は慣性の仲間にはいるべきもので，力とは別である．量子論的統計的な物質の物理学では，物質が空間を形づくると考えられているが，その物質と場の関係についての私の考えかたは，ミーの場の理論に対立するものである．これについては第4版に述べた．そのさいに用いられた虚構場，すなわち，1個の物質粒子の内部（すなわちその粒子によって占有されている空間領域）を満たしている虚構場という考えかたは，とりあつかいやすい，そして成功の見込みのある方法と思う（§38)．空間の構造に関する群論的研究については第II章でまったく表面的に述べたにすぎない．この点については，その補充のために，私のスペイン語の講義"空間の問題の数学的分析"("Mathematische Analyse des

Raumproblems")を参照することをすすめる．この講義は Institut d'Estudis Catalans (Barcelona) によって出版されることになっている（なお多分ドイツ語でも出版されることになろう）．

本書の第 4 版については，そのフランス語訳および英訳が出版された．フランス語訳は幾多の点で，非常に"自由"に書かれているので，その内容に対しては私は責任を回避せざるを得ない．

1922 年秋，チューリッヒにて

H. ワイル

訳者序

相対性理論は人間の思索が産んだ科学的理論体系のうちで，その構想の壮大なこと，脱常識的な点，また強い説得力と理論内容の壮麗さにより多くの人々の心をとらえた点で他に類を見ない．現代物理学の花形といわれる素粒子論でさえも，相対性理論にくらべれば，たとえそれが建設途上にあるとはいえ，その泥くささのために，到底くらべものにはならない．相対性理論がアインシュタインにより発表されてから，専門家はもちろん，物理学に直接関係のない大衆の間にも異常なセンセーションをまきおこしたのも納得のいくことである．その後，物理学界では，新興の量子力学，核物理学つづいて素粒子物理学や，物性物理学に研究の中心が移り，相対性理論は一時，物理学の流行からはなれ，文字通り古典物理学のひとつとみなされるようになった．しかし近年，一方では宇宙物理学の進歩にともない，また他方では極微の世界の物理学である素粒子物理学の発展に呼応して，この偉大な古典物理学が再び物理学のひのき舞台に呼びもどされる機運がおきてきた．

相対性理論には物理学の他の分野の理論には見られない，いろいろの興味ある特徴がある．一般大衆に大きな関心を

おこさせたこともそのひとつの特徴といえるかもしれない．しかしこの理論のように，人間の思索に導かれて，ほとんど一意的に，また必然性をもってその最終の形式に到達した理論は他にはないであろう．また反面これほど革命的な考えかたに基づいているにもかかわらず，それから導かれる結論と，従来の理論のそれとの間に著しい差異がなく，悪くいえば，単なる思考上の満足を与えるものにすぎないといえるほど，実験的にその正当性を証明するのに困難な理論も少ないであろう．このような特質をかえりみるとき，相対性理論の結果を学習することも大切かもしれないが，むしろこの理論がどのような思考過程を経て，またどのような論理的必然性に導かれて完成されたかを追跡する方がはるかに興味のあることであり，またそれは，素粒子物理学等現在開発途上にある分野で，理論体系を組みたてるのに，大いに参考になることと思われる．

日本をはじめ，海外でも相対性理論の参考書は数多くある．また近年では，外国の書物もつぎつぎに翻訳され，それらのなかには優れたものも多い．相対性理論そのものを学び，それを使用しようとする人に便利な書物という点では，その昔出版されたもの（たとえば，本書の原著）にくらべて，むしろ最近の書物の方がまさっているといえるかもしれない．しかしさきにも述べた相対性理論の特徴，特にこの理論がどのような思考過程を経て誕生したかを知ろうとするとき，本書すなわちワイルの著書“空間・時間・物質”ほどすぐれた書物は他にあるまいと思う．本書は昔

から名著ではあるが難解という点でも有名である．たしかに，本書は初心者には読みづらいし，また本書によって相対性理論の一般的知識を得ようとするのは無理かもしれない．しかし現実世界から提供された物理学的知識を，哲学的思考によって整理，総合し，数学という用語を用いて表現しようとした原著者の意図は，本書により相当に満足のいく程度に達成されたといえよう．しかしページ数の制限によるためか，もちろん，本書にも論じたりない部分が見受けられ，読んでいて物たりないと感ずることもないではない．また物理学的事項の説明（たとえば電磁気に関する説明とか，ミーの理論等）のなかには，ときに非常に大げさ（よくいえば哲学的）な説明，原著者のリキみすぎた主張に出会う場合がある．この感想は数学者であり哲学者でもある原著者と，物理学を専攻する訳者の知識や，考えかたの相違にもとづくことで，もともと，数学者にも物理学者にも満足のいくような内容を期待する方が悪いのかもしれない．このように不満な点もないわけではないが，また反面いかにも数学者らしい厳密さ，几帳面さ，また特に具体的な計算でも実に気のきいた扱い等に感心させられる点も多々ある．例えばアインシュタインの場の方程式や，惑星の運動方程式の解を求める場合の気のきいた扱いには思わず脱帽したくなる．

ともかく本書は，日本はもちろん，外国にも類を見ない名著であることは確かであり，これを読破するだけでも誇りとしてよいほどの難解の書でもある．およそ理論物理学

を志す人は必ず一度は本書に挑戦すべきものと思う．

ドイツ語で書かれた原著（第５版）は，実に翻訳しにくく，まったく訳者泣かせの書物である．そこで文意を正確に伝えるため，またなるべくわかりやすい日本語になるよう，相当，いいまわしかたをかえた個所もある．また原著の説明が不十分と思われる個所については，随所に訳者の注をさしはさんだ．したがって原著の格調のある文体を訳文の中に再現させることができなかったのは，原著者に対してすまないと思う．しかしそのかわりに，この訳書の方が原著よりずっと理解しやすくなったと信ずる．

近頃，何事によらず，easy に事をはこぶことが大流行である．食品の調理，カメラをはじめ，学問の世界にも“インスタント”化がはいりこみつつある．このような流行に反抗して，この難解な書をジックりと苦労しながら読破するのは一大痛快事といえよう．

1972 年 10 月

内山 龍雄

緒　論

われわれをとりまくこの現実の世界が**物質**とよばれる材料からできており，その存在の仕方，つまり様式が**時間**ならびに**空間**であるとわれわれは普通理解している．すなわちひとつのきまった物質の塊はある瞬間に一定の空間の部分を占有する．これら三種の基本的概念は，これらから導かれる**運動**という概念において互いに最も密接に結びつけられる．デカルトは，この世界に起こるすべての事件をこれら三種の基本的概念によって記述すること，したがってそれを運動として把握することが精密科学の仕事であると考えた．人間が自由にめざめて以来，**時間の意識**，世界の時間的経過，あるいは未来にむかってすべての事象が変化または形成されること（Werden）は，常に人間の精神にとって深い謎であった．これこそ形而上学における究極的問題のひとつであり，これの解明のために哲学はその永い歴史を通じて絶えざる努力を傾けてきた．ギリシャ人は**空間**を科学の最も明確な対象と考えた．古代文化のなかでこの**空間**から純粋科学に属するひとつの概念が発展した．それはすなわち幾何学である．幾何学は，古代文化の発展の支えとなった精神界における原理の最も強力な表現である．

中世になって宗教的独断的世界観が失敗に終わり，懐疑主義の大浪が，それまで真実と見なされていたすべてのことを粉砕してしまったとき，真実を追い求める人々は，巌にでもしがみつくように幾何学にかじりついた．そして科学を“より幾何学的”にすることがすべての科学の最高の理想とされた．最後に**物質**に関しては，従来われわれはこれをつぎのように理解していた．すなわち物質はすべての変化の基礎となっており，物質のいかなる塊もひとつの量として測られる．また物質の特性は，変化の際に物質の量が変わらぬままに保たれること，つまり物質の量の保存の法則という形で表現される．以上が空間および物質について従来われわれがもっていた知識である．これは最も普遍的でかつ必然性をもった先験的知識として哲学者によりしばしば要求されたものであるが，それが今日，はなはだ疑わしいものとなってきた．まず物理学は，ファラデーやマックスウェルの手により，**場**を物質とはまったく異なった範疇に属する物理学的実在として，物質に対置した．また数学は過去一世紀にわたり，ひそかにユークリッド幾何学を論理的に深く掘りさげることによって，その正当性に対する確信を掘りくずしてしまった．その結果，今日，空間，時間ならびに物質に対してわれわれのもっていた上述のような概念（それは今日まで自然科学の最も確固たる支柱とみなされていたものであるが）を転覆させ，この問題に対してより自由な，より深い考えを持ちうる余地を設けようとする革命的な動きが勃発した．このような革命は本質的

にはたった一人の人間，アルベルト・アインシュタインの知的活動によってひきおこされた．現在この動きはその根本的な考えに関しては，ある結論に到達したように見うけられる．しかしわれわれが現在，既に新しい結論に直面していようと否とにかかわらず，いずれにしてもわれわれは新しく発生してきた事態を十分に検討しなければならない．われわれの科学的思索は決して後退することはありえない．それが，現在われわれが到達することのできた考えをさらに乗り越えて前進することはありうる．しかし昔のせまい硬直した考えにたちもどる道は閉ざされている．

ここに提示された問題に対して哲学も数学も，また物理学もそれぞれ自己の関連する分野をもっている．しかしここでは，この問題の数学・物理学的な面だけに限って議論を進めることにする．これの哲学的な面については，以下のような理由から，ごく簡単にふれるにとどめる．すなわち哲学的な方面ではまだなんらの決定的な結論が存在しない．またここに提出された認識論的問題に対して，自分自身が満足のいくような私の解答をもちあわせないからである．ここにこれから述べる種々の概念は物理学的認識の根底に対する単なる考察からうまれでたものではなく，いきいきとして常に前進を続ける科学（それにとっては昔の殻は今は小さすぎるようになった）の“増築”のさいに，具体的な物理学的問題から発展してきたものである．科学では新しい概念が誕生すると，そのたびごとに，この新概念によって要求される範囲で，それまでの原理の修正がおこ

なわれる．すべての物が現在ある姿でしか存在しえないように，個々の科学も上述のようなやり方で，それぞれ独断的に前進を続ける以外には，他の行きかたは許されない．すなわちその科学にとって固有な方法のワクのなかで育った合理的な動機によって駆りたてられて，科学は自己の信ずるままに，そのあたえられた道をつき進む以外には，他のありかたは許されない．上述の問題についての哲学的な解明は，個々の科学にあたえられた問題とはまったく異なった性質のひとつの大きな課題である．その際哲学者はつぎのことに注意をするべきである．すなわち具体的な対象のあたえられている科学の進歩を，上に述べた課題に内在している“困難の鎖”でしばったり，あるいは科学の進歩を妨害したりしないように注意をしなければならない．

以上のような次第であるが，それにもかかわらず私は二，三の哲学的な議論からはじめたい．まずわれわれが日常の生活を送っているこの自然のなかで，われわれは人間としての自分を，その知覚という行為を通して，まわりの物体から区別する．われわれはこれらの物体を**実在するもの**とみなし，またわれわれの知覚を通してこれらがわれわれの目にうつるままの姿に造られ，形をあたえられ，また彩色されているものとうけとる（ただし，錯覚，鏡にうつった虚像，夢，幻覚等々のようなものは除く）．これらの物体は，その姿が種々に変化するという多様性をもった“現実”によってとりかこまれ，あるいはそれ（現実）が，まるで水のように物体のなかにまでしみこんでいる．この“現実”

こそ，すべてのものを唯一の，永遠に存在する空間的世界に統合するものである（この世界には私自身，自分の肉体とともに包含されている）．本書ではただこのような物体的対象だけを扱い，これ以外の種類の対象は問題にしないことにする．そのような別種のものもわれわれ人間の対象としてたしかに存在する：例えば生物，人間，日用品，価値，あるいは国家，権利，言語等々のようなものがそれである．ところでものごとを理論的に考えようとする人にとっては，ここに簡単に私が説明したような素朴な実在論に立脚した世界観に対して疑念をもつことから，おそらくその人の哲学的自覚がはじまるであろう．例えば“緑”というものは，“緑という感覚”に対する相関概念としてわれわれの知覚の中に存在する対象であって，物自体にあたえられている性質あるいは状態と考えることは無意味である．このような主観性が感覚の特質であると気づくことこそ，ガリレイ（ならびにデカルトやホッブズ）の考えでは，現代の量的物理学（すなわち物の性質をぬきにして，もっぱらそれの量的関係だけを追求する物理学）の数学的・構成的方法の第一歩である．例えば“現実の世界”における色は現代物理学ではエーテルの振動，つまり一種の運動として理解されている．カントにいたってはじめて，哲学の領域でつぎのような明快な考えの前進がなされた．すなわち感覚的な特性ばかりでなく，空間や空間的特性までも絶対的な意味では，なんら客観的意味をもつものではなく，**空間はわれわれの直観のひとつの形式にすぎない**という考えである．わ

れわれの直観のなかに存在する空間や時間の本質が，数学的に構成された従来の物理学的世界の中には，まったく取りいれられてなかったことを物理学の領域で明瞭に示したのは，おそらく相対性理論がはじめてであろう．すなわち従来の物理学では色は断じてエーテルの振動ではなく，3個の空間的ジメンジョンをもった変数と，1個の時間的ジメンジョンをもった変数，つまり合計4個の独立変数の関数の数学的なふるまいにすぎない．

一般的に述べれば，現実の世界，またその各構成部分やその宿命はすべてわれわれの意識行為の志向的対象（intentionales Objekt）としてだけ存在し，またあたえられることができるといえよう．この考えにしたがえば，目の前にあたえられた“物”は，それが私に受けとられた形とまったく同じ形の私自身の意識経験である．この意識経験は，実証主義者がしばしば主張したような，単なる感覚という素材だけからできているものではなく，知覚（Wahrnehmung）がその本質である．いま例として私の目の前にひとつの対象が在る場合を考えよう．上の考えによれば，それは幻覚ではなく実際にいきいきとしてそこに存在しており，それに対する私の経験は，誰でもよく知っている，しかしけっしてある程度以上には明確にすることができないまったく独特な方法でこの実際に目の前にある対象と結びついている．この意味でこの対象を，ブレンターノにしたがい，**志向的対象**と呼ぶべきであろう．さて私がいま机について知覚をもったとする．この知覚自身をさら

に新しい内的知覚の志向的対象とみなすときはじめて（このようなことは反省という自由な行為により私にとっては可能である），私はその（単に机自身についてだけではなく）知覚についてある物を知り，また上に私が述べたことを確実なものとさせることができる．この第二の行為により志向的対象はひとつの“**固有のもの**”（Immanentes）となる．すなわちそれは私の行為と同様に，私の“経験の流れ”のひとつの現実の構成部分となる．これに反して最初の知覚行為においては，対象はいわば超経験的なもので，それは私の意識経験のなかにあたえられているが，現実の経験の一部ではない．上述の“固有のもの”は絶対的なもので，私がここに持っているものそのものである．また事情によっては反省という行為によってその本質を“与えられたもの”と考えることもできる．これに対して超経験的な対象は単なる現象的存在で，たとえばそれは目に映った姿にすぎない．それは種々の形と種々の陰影をもってその姿を現わす．たとえば一枚の同じ葉でも，それを見る私の位置や，照明のしかたでいろいろの異なった大きさや，種々の色調に見える．しかしそれらのどの大きさや色も，葉それ自体のあるがままを示しているものだと主張する権利はない．すべての知覚はその中に現われる対象が実在性をもつものと主張するのが常である．この主張はひとつの世界が実在するという一般的主張の一部分であり，またその内容を規定しているものである．しかしわれわれが自然な素朴な考えかたから哲学的な見かたに移るとき，自己の知覚

について反省をし，上述のような実在性についての主張にそれ以上荷担することをやめるようになる．つまりこの主張には，知覚の対象の背後に何物かが現実に存在するという想像が含まれていることに気づく．このように物の実在性を設定することの意味とその正当性は，つぎのような問題を解くことによりあたえられる．すなわちこの問題の解答は，与えられた意識の中だけから発見されなければならないという特質をもったものである．しかし世界の中に起こる諸現象を，私によって作られた意識の遊戯とみるという考えが，素朴な実在論にくらべてより高い真理をもつとは，私は決して思わない．しかし，ここでつぎのことは大切である．すなわち与えられた意識は，対象の背後に“実在”が在るとすることの意味と正当性を絶対的な方法で把握するための出発点であるということを理解することである．これに似たことは論理学の領域にもある．たとえば私がくだした判断は，ある事情が真実であることを主張する．ここでまた，このような真実に対する主張の意味と正当性についての哲学的疑問がうまれる．ここでも私は客観的真実という理念を否定するものではないが，しかしこの疑問は絶対的に与えられたものだけによって私が理解しなければならない問題である．——“純粋な意識”は哲学的に先験的なものの占めるべき座席である．これに対して“実在”の主張を哲学的に解明するには，つぎのことを明らかにしなければならないし，また明らかにするであろう．すなわち，いかなる知覚，またいかなる記憶（これらによって私

は実在を把握するのであるが）というような経験的行為も，知覚された対象が実在性をもち，また知覚されたままの状態をもつものと主張することが最終的に正当であると保証することはできないということである．このような正当性の保証は絶えず他の新しい知覚によって支えられた正当性の主張により打ちくだかれ，そのような新旧の正当性の交代はつぎつぎと永久にくりかえされる．実在するものの本質には，その内容をくみ尽せないという特質がある．すなわちこの内容には，常に新しい，しかし部分的には互いに矛盾する多くの経験と，それら矛盾する経験どうしの和解を通して，われわれは無限に近づくことができる．この意味で“実在する物”はひとつの極限的理念である．すべての実在についての認識がもつ経験的特性はこのことに基づくものである［1］．

意識の流れの原形は**時間**である．意識の内容が単に存在するもの（たとえば概念，数等々のようなもの）ではなく，“唯今存在するもの”，すなわち常に内容の変化する“現在の連続”という形であたえられることは，ひとつの事実である．それは理性にとって，これからもそうであるように，わかりにくい謎のようなことかもしれないが，しかしそれを否定し去るわけにはいかないし，われわれはこれを事実として受けとらなければならない．それゆえ，これが**在る**といってはならない．むしろこれが**唯今在る**〔訳者注：しかし常に“唯今”であり，つぎの瞬間にも，そこではやはり“唯今”である．したがって“在る”のは常に“唯今”で，

それ以外には在りえない〕といわなければならない．もし反省によってこの意識の流れから自分を引き離し，その内容をひとつの客体としてわれわれに対置するならば，この流れはわれわれにとってひとつの**時間的経過**となる．そのひとつひとつの段階は互いに，ひとつが他に対して**以前**とか**以後**の関係でならぶ．

時間が意識の流れの形式であるように，**空間**は物体的実在の様式であるとわれわれは主張する権利がある．外的知覚という行為をとおして（例えば色彩によって）われわれに示されているように，すべての物体的な物の本質は，それらの物が空間的ひろがりをもって互いに分離されているということである．しかしすべてのわれわれの経験をまとめ，全体としてひとつに連結したこの実在世界を組みたてることによってはじめて，すべての知覚のなかにある個々の空間的ひろがりは，すべての物を包含するひとつの共通の空間の一部となる．このような空間が**外的世界の形式**である．以上のことからつぎのようにいえよう．すなわちすべての物体的な物は，その物が内容的に変化することなしに，つまり同一の物のままで，空間の中のひとつの位置にいることもできるし，また他の位置に席をかえることもできる．このことから**空間の一様性**がでてくる．この特質こそ**合同概念**の根源である．

意識の世界と，超経験的実在とはまったく別のもので，知覚に対する静かな顧慮（反省）がこれら二つのものを結びつけてくれると考えるならば，上に私が述べたように，

つぎのことがいえよう：すなわち一方では連続的な“唯今”という形で刻々に変化する，空間的属性をぬきにした意識と，他方では空間的にひろがっているが，時間的属性をぬきにした実在（この中に前者はひとつの変化する現象として含まれる）が共存するということである．しかしながらすべての知覚より以前に，まずわれわれには努力とか抵抗という能動的ならびに受動的な体験がある．自然のなかで活発に生活している人にとっては，彼が意図する行為をどの点に働かせたらよいか，あるいはその行為に対する抵抗がどの点からくるかを彼の意識に具象的に明瞭に示してくれることが知覚のひとつの役目である．能動的ならびに受動的行為の体験をとおして私自身は，肉体に結びついた霊魂的現実性をもったひとつの個体となる．その肉体は外的世界の物体的な物として空間の中にその席を占め，またそれによって私と同様な他の個体と関連をもっている．さらに意識はその固有性を犠牲にすることなしに，実在のひとつの部分となり，またこの特別な人間，すなわち既に誕生し，ゆくゆく死ぬであろうこの私自身となる．また体験によって意識はその形式，すなわち時間という形式を実在の上にひろげる．つまり実在の上にひろがった時間という形式は変化，運動，経過，形成，消滅というような形であらわれる．私の意志が私の肉体を通して活動的行為として現実世界の中に浸入するように，現実世界自身もまた**活動するもの**（wirkend）［これのドイツ語の名前 Wirklichkeit（現実）が示すように］となる．そこに起こる現象はすべて

一般的因果関係で互いに結ばれる．実際，物理学では宇宙的時間と因果律が互いに分離できないということが明らかにされている．相対性理論は現実世界における空間と時間の融合という問題を解決したが，この相対性理論の新しい考えかたは同時にこの世界における種々の作用の関係に対してひとつの新しい見解をあたえた．

以上でわれわれの考察の筋道は明らかである．時間自身についてなおいうべきことや，またその数学的——概念的把握については，この緒論で述べることにする．空間については，これからもっと詳細に扱わなければならない．第I章ではユークリッド空間ならびにその数学的構造について述べる．第II章ではIに述べた概念を発展拡張し，ユークリッド体系をのりこえて計量的連続体（metrische Kontinuum）（すなわちリーマンの空間概念）という一般的概念にまで議論を進める．つづいて第III章では，さきに言及した，世界における空間および時間の融合という問題について議論する．この点以後，力学および物理学の知識が重要な役目を演ずる．というのは，この問題は，すでに強調されたように，世界をひとつの実在として理解するという観点と本質的に結びついているからである．第II，第III章に述べたことを総合すると，それはわれわれを最後の第IV章のアインシュタインの一般相対性理論に導く．この一般相対性理論には，物理学的に見て，ひとつの新しい重力の理論が含まれている．さらに第IV章では一般相対性理論のひとつの拡張についても述べる．この拡張され

た理論は重力のほかに電磁現象をも一緒に抱括するものである．空間および時間について，従来われわれがもっていた概念がこうむった革命は，同時に**物質**という概念にも必然的に影響をあたえた．そこで物質についていうべきことは第 III および第 IV 章の適当な場所で述べることにする．

時間に数学的概念を割りふることができるためには，つぎのような理想的な可能性から出発しなければならない．すなわち時間の流れの中にちょうど直線上の点のように“**唯今**”を指定すること，すなわち“時点”（Zeitpunkt）をいくらでも正確に指定できるということである．その結果任意の 2 個の異なった時点については，必ずそのなかのひとつは，**以前**，他は**以後**となるであろう．この“順序的関係”についてはつぎのような基本則が成立する：いま A が B より以前，B は C より以前ならば，A は C より以前である．任意の 2 個の時点 A, B があり，A は B より以前とすると，これら 2 点はひとつの**時間的ひろがり**を規定する．すなわちこのひろがりの中には，A より以後にあり B より以前であるすべての時点が含まれる．時間がわれわれの体験の流れの形式であるということは**等しい**という理念の中に現われている．すなわち“時間的ひろがり”AB を満たしている経験内容は，それがあるがままに，つまりその内容をそのままにして，他の時間的位置にその席を替えることもできる．この場合，他の時間的位置に在り，同じ経験内容で満たされた“時間的ひろがり”は，前者，すなわち“時間的ひろがり”AB に等しい．物理学では，このことと因果

律から，客観的時間の時間的ひろがりが“等しい”か否かに対して，つぎのような客観的判定条件が生まれる．すなわちひとつの完全に孤立した物理的体系（すなわち他のすべての物からなんら作用を受けない物理系）が過去のある瞬間におかれた状態とまったく同じ状態に，再びこの孤立系がたちもどったとする．その場合にはその瞬間から以後，前回たどったものとまったく同じ種々の状態の時間的連鎖が再びくりかえされ，したがってその経過は周期的である．このような物理系をわれわれは一般に**時計**と呼ぶ．そのすべての一周期はみな**等しい**時間的継続（つまり時間）をもつ．

測定による時間の数学的把握は上述のふたつの関係，すなわち**以前—以後**（あるいは**過去—未来**）と**等しい**という関係にもとづいている．ここで測定の本質を簡単に説明しておこう．まず時間はつぎの意味で一様である．つまり個々の時点は，その位置だけを個々に単に指示することによりきめられる．あるひとつの時点は持っているが，他の時点にはないような特性で，しかもそれは時間の一般的な本質の根底にあるものといったような性質は存在しない．特に上に述べたふたつの時間的関係を基礎として純粋に論理的に導かれるすべての特性は，必ずすべての時点が持つ共通の性質か，さもなければどの時点も持たない性質である．一対の時点，すなわち，それらによりきまる“時間的ひろがり”に対しても同じことがいえる．すなわち上述のふたつの時間的関係から導かれる特性が，ある一対の時点に対し

て成立するときは，他の任意の一対の時点 AB（A は B より以前）についても成立する．しかし 3 個の時点の場合には事情はことなる．まず 2 個の時点 OE があたえられているとする．このなかで O は E より以前とする．ここで時間的ひろがり OE を単位にとり，これを基準としてさらに第 3 の時点 P を概念的方法で決定することができる．それには，上述のふたつの時間的関係から純論理的に，3 個の点 O, E, P の間にひとつの関係 t を設定すればよい．その関係とは，任意の 2 点 O, E（O は E より過去にあるとする）に対して関係 t を満足する第 3 の点 P は一個存在し，まただだ 1 個しかないという内容のものである．これを記号的につぎのように表わす；

$$\mathrm{OP} = t \cdot \mathrm{OE}$$

（たとえば $\mathrm{OP} = 2 \cdot \mathrm{OE}$ は $\mathrm{OE} = \mathrm{EP}$ を意味するものとする）．ここで数は上述のような関係 t を簡潔に表現する記号にすぎない．またそれは時間的関係を基礎として論理的に導くことができるものである．なお P は“**座標系 OE において**（時間的ひろがりの単位 OE を基準とした）**座標** t **をもつ時点**”である．ふたつの異なる数 t, t^* は同じ座標系では，必然的に常にふたつの異なった点をあたえる．なんとなれば，いま仮に同じ点を与えるとしよう．そのときは関係式

$$t \cdot \mathrm{AB} = t^* \cdot \mathrm{AB}$$

で表わされる性質は $\mathrm{AB} = \mathrm{OE}$ の場合には成立する．ところで時間的ひろがりの一様性（つまりある時間的ひろがり

が持つ性質は必ず他のすべての時間的ひろがりにも同様にある）のために，AB＝OE でない任意の時間的ひろがり AB に対しても上の関係は成立する．そこで

$$\mathrm{AC} = t\cdot\mathrm{AB} \quad \text{および} \quad \mathrm{AC} = t^{*}\cdot\mathrm{AB}$$

は3点 ABC について同じ関係をあたえる．したがって仮定に反して $t=t^{*}$ となる．数は時間的ひろがり OE を単位にとるとき，これを基準として，時間的連続体の中に個々の時点を概念的に，したがって客観的に，また完全に正確な方法で指定することを可能にする．しかしその際，自己の除外による客観化，またその直観から生まれる生命の除去による客観化は実は完全なものではない．なぜならば個々の取扱いの際に（ただ近似的にだけ）提示される座標系は，自己の抹殺の際必然的に残る自己の残滓である〔訳者注：ひらたくいえば単位 OE，および O の位置の選びかたはわれわれの自由にまかされているということである．これだけは客観化できないものとしてのこる〕．

測定を以上のように原理的に公式化することにより，数学が精密科学のなかでどのように役立つかが明らかになると思う．測定されるべき対象のもつ種々の特性を個々に明示することにより，この対象を規定することと，ある概念的な方法で同じ対象を規定することのちがいこそ，測定にとって本質的なことである．後者は，直接に規定できるものとされた対象に相対的に，つまりそのような対象を基準としたときにのみ可能である〔訳者注：上述の時点の測定を例にとれば，ここにでてきた“直接に規定できる対象”

とは，OE である．これを基準とすれば，任意の時点を概念的に，OE に相対的に規定できる〕．このことから相対性理論は常に測定の問題と結びついている．その問題は，任意の対象領域に対して一般的に述べれば，つぎのようなものである．1）ここに問題にしている連続的にひろがった対象領域のなかから，ある対象を基準として，任意の対称 P を，適当な概念的方法を使っていくらでも正確に規定できるためには，基準にとる対象として何を直接的に明示すればよいか？　この明示されるべきものは**座標系**とよばれる．またある座標系を基準にしたとき，対象 P について概念的に規定されるものを P の**座標**という．ふたつの異なる座標系は客観的にみて完全に同等である．すなわち一方の座標系にはあり，他の座標系にはないような概念的な特性は存在しない．もしそのような特性があるとすれば，座標系について直接規定できるものとされる特性があまりにも多すぎる．2）任意のひとつの同じ対象 P に対して，ふたつの異なる座標系を基準にしたとき，それぞれの座標の間にはいかなる規則的関係が存在するか？

時間的な領域において上の第一の質問に対する答はつぎのようなものである．すなわち座標系はひとつの時間的ひろがり OE（つまりその原点 O の位置と，単位にとるひろがり OE の大きさあるいは時点 E の位置）により規定される．第二の質問の答はつぎの変換公式

$$t = at' + b \qquad (a > 0)$$

である．ここで a，b は任意の定数，t は第一の座標系を基

準としたときの任意の一点Pの座標で，t' は第二の座標系を基準にしたときの同じ点の座標である．その際すべての可能な一対の座標系に対して，この変換を特徴づける数 a, b はそれぞれすべての可能な実数値をとる．ただし a には常に正の数という制限がつく．このような変換の全体は，このことの本質が示すように，ひとつの群をなす：すなわち

1）恒等変換 $t=t'$ がこの集合に含まれている；

2）任意の変換に対して必ずその逆もまたこの集合の中にある．

この逆変換により座標は再びもとのものにもどる．変換

$$t = at' + b$$

を (a, b) という記号で示すことにすれば，これの逆変換は $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$，すなわち

$$t' = \frac{1}{a}t - \frac{b}{a}$$

である；

3）ふたつの変換を続いて行なった結果もまたひとつの変換であり，それはこの集合に属している．実際つぎのようなふたつの変換

$$t = at' + b, \qquad t' = a't'' + b'$$

を続けて行なうと，

$$t = a^* t'' + b^*$$

となる．ここで

$$a^* = a \cdot a', \qquad b^* = (ab') + b.$$

a, a' はともに正数だから，a^* も正，したがって (a^*, b^*) は今考えている集合に属する変換である．

第 III および第 IV 章で述べる相対性理論は上述のような相対性の問題を，単に時点に関してだけでなく，物理的世界全体に対する問題として提起する．この問題は，“空間と時間”という世界の形式に対して，ひとたびその解答が見つかれば，それは完全に解決されたことになるということがわかるであろう．またこの世界の物理的実体は，空間および時間に対してひとつの座標系を設け，それを基準として，また測定により概念的に数を用いて完全に記述される．

すべて物事の始めは曖昧でわかりにくいものである．数学者は彼が創った科学において厳密な形式的な方法により，彼の概念を用いてその研究を進めてゆく．しかしこの数学者にとって，彼が自己の方法を用いて理解できるよりもっと暗い奥深いところに，物事の根源が存在することを常に想い起こすことは必要である．個々の知識の向こう側には常にそれらを包括するという大きな問題が横たわっている．哲学はいままでいつもある体系から他の体系へとグラグラと揺れうごいてわれわれを落胆させるばかりであったが，それにもかかわらずもしわれわれのもつ多くの知識を無意味な渾沌の中につき落したくないならば，われわれは，哲学を見捨ててはならない．

第Ⅰ章　ユークリッド空間：数学的定式化と物理学における役割

§1　同等概念と空間概念[1)]

時間の流れの中に，線上の1点に似た“**現在**”を指定したように，連続的にひろがった空間（これも時間と同様に無限に細かく分割できる）には，いくらでも正確に指定できる最も簡単な要素である**此処**，つまり空間点がある．空間は時間と異なり，1次元の連続体ではない．その連続的なひろがりの様式は，時間のような簡単な以前—以後の関係に還元することはできない．この連続体をどのような連続的関係として理解するべきかについては，われわれはしばらく問題にしないことにする．しかし時間と同じように，空間も現象の**形式**である．したがって同等という概念は空間にもある．ひとつの物体は，その容積を少しも変えず，完全にそのままの姿で，現在それが置かれている空間の部分とは別の任意の場所に席を占めることができる．その場

---

1)　訳者注：原著の題名を直訳すれば「同等の概念から初等的な空間概念を導きだすこと」であるが，長すぎるから上記のように簡略にした．

合には，この物体により別の場所で占有される空間の部分 $\boldsymbol{S}'$ は，その物体がもともと実際に占めていた空間部分 $\boldsymbol{S}$ と等しい，あるいは**合同**（kongruent）である．$\boldsymbol{S}$ の中にある任意の点 P は $\boldsymbol{S}'$ の中のあるきまった点 P′ に対応する．もとの点 P を実際に包んでいた物体の小部分は物体の変位により，他の場所に移される．上述の点 P′ はこの変位後の小部分が占める空間部分のなかにある．点 P に点 P′ が対応するこの“写像”をわれわれは合同写像と呼ぶ．適当な主観的条件を満足しているときは，物体は位置の変移後も,、それがもと実際にあたえられていたままの姿に見える．別々の場所にある空間部分が互いに等しいという概念は，ひとつの剛体をまず一方の場所に置き，つづいて他の場所にそれを移すことによって実現させることができる．ここで剛体とは，それを動かしたり，あるいは手をくわえることができるとはいえ，それに対してわれわれが適当な位置に身を置けば，それは必ずもとと同じ形に見えるものを意味する．さきにも述べたように，空間は時間とは異なり分析するのに困難な特別な連続的関係を持っているが，私はこの特性とともに上述の同等という概念を幾何学を創る基礎とする．またすべての幾何学的概念がどのように，ここに述べた基礎に還元されるかを以下に概説しよう．その際，合同写像のなかから**並進運動**（Translation）を特にとり出すことは私の本来の目的である．この並進という概念のもとに，はじめてユークリッド幾何学は厳密に公理論的に基礎づけられる．

まず直線から始めよう！　直線の特徴はそれが２組の点で決定されるということである．すなわち直線でない任意の線（つまり曲線）は，その上にある２個の点を固定したままで，合同写像によって，この線がはじめにあった位置と異なる位置に移される（これは直線であるかどうかを判定する試験である）．したがって２個の異なる点をＡ，Ｂとするとき，これら２点をそのままに保つすべての合同写像に対してその位置を変えない点はすべて，直線 $g = \mathrm{AB}$ 上に在る（すなわち直線とは“どちらの側にもまがっていない”線である）．運動学的にいえば，直線とは回転の軸であるということになる．直線は一様で，時間と同じように，ひとつの１次元連続体である．それはその上に在る任意の１点Ａによりふたつの部分，つまり二つの“半直線”に分割される．いまＢ，Ｃがこの２本の半直線のそれぞれの上に１個ずつのっているとする．このときＡはＢ，Ｃのあいだにあるという．また一方の半直線上のすべての点はＡの右に，他の半直線上の点はＡの左にあるといわれる（ここでどちらの半直線を右，他を左と呼ぶべきかはまったく勝手である）．この“あいだ”という概念に対してなりたつ最も簡単な基本的事実は，幾何学を演繹的に組みたてるのと同じように厳密に完全に公式化される．それゆえ，幾何学では，人々は空間の連続概念を“あいだ”という概念，いいかえれば“Ａは直線ＢＣ上にあって，ＢとＣのあいだにある”という関係に還元しようとする．いま A' はＡの右にある点とする．A' によって直線 g は，Ａによると同様

に，ふたつの部分に分かれる．そこで A が含まれる部分を左と名づける．逆にもし A′ が A の左にあれば，事情はすべて逆になる．このようなとりきめをすれば，AA′ についてばかりでなく，直線上の任意の 2 個の点に対しても上に述べた事情と同じような関係がうまれる．時点が以前，以後によって順序づけられたのとまったく同じように直線上の点は左・右により順序づけられる．

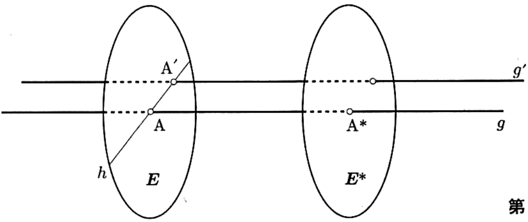
左と右はつぎの意味で同等である．いま直線 g がその上の 1 点 A によりふたつの半直線に分割されているとする．これらの半直線は，A を不動にたもつひとつの合同写像により互いにいれかわることができる．また任意の 2 点 AB できめられた直線の部分は，これを逆にしてもとの位置にかさねることができる（つまり B は A の上に，A は B の上に置かれる）．一方，つぎのような特別な合同写像もある．それは点 A を A 自身に，A の右にあるすべての点を A の右にある点に，A の左にあるすべての点を A の左にある点に写像する．これによって直線上のすべての点は全然移動せず，もとのままの位置にとどまる．直線の一様性はつぎの事実によりあらわされる．すなわち直線上の 1 点 A が同じ直線上の他の 1 点 A′ に移され，また A の右側にある半直線は A′ の右側部分に，A の左側にある半直線は A′ の左側に移されるように，直線をずらして自分自身の上にかさねることができる（直線の並進）．直線上の任意の 2 点 AB が並進によって同じ直線上の他の 2 点 A′B′ の上にそれぞれ移されたとき，AB は A′B′ に等しい（AB＝A′B′）

と呼ぶことにすれば，この概念に関して，時間に対して成立したものと同じような事情が直線についてもうまれる．すなわちこれにより数を導入することが可能になる．さらに単位 OE を規定すれば，数は直線上の点の位置を正確に規定する．

直線 g の位置を変えない合同写像（すなわち g のすべての点を必ずそれぞれ g の上の他のどこかの点に移す写像）の全体はひとつの群となる．この群についてこれから考えよう．この群のなかで，g を軸とする回転は，直線 g 全体の位置を変えないばかりでなく，g の上の各点をもすべて不動にする写像である．このような性質のために g のまわりの回転は特別な写像である．この群において，われわれは，並進をスクリュー運動からどのように区別できるであろうか？　私はここでまずつぎのような方法をえらぶ．すなわち直線だけでなく，平面に対しても，回転という考えかたの上にその定義の基礎をおくという考えかたである．

1 点 O から出ている 2 本の半直線はひとつの**角**を作る．すべての角は，それをひっくりかえして自分自身の上にかさねることができる．その結果一方の辺は他の辺の上に（また他の辺はこの逆のやりかたで）重ねられる．ひとつの角がその補角に合同のとき，この角を**直角**と呼ぶ．いま直線 h は直線 g と点 A で直交しているとする．このとき，g を軸とするある回転は，A によってふたつに分割された h の両部分をいれかえる［このような特別な回転を折り返し（**Umklappung**）とよぶことにする］．A において直線 g

に直交するすべての直線はひとつの平面 $\boldsymbol{E}$ を作る．この $\boldsymbol{E}$ は点 A において g と直交する．g に直交する任意の二本のこのような直線については，g のまわりの回転によりそのうちの一方の直線から必ず他の直線を作り出すことができる．A を固定したままにして，なんらかの方法で g の向きを反転させて自分自身の上にかさねる，つまり A によって分割された g の両部分を互いにいれかえれば，平面 $\boldsymbol{E}$ は必ずもとの自分自身の位置に移される．平面のこの性質と，回転軸（g）に対する対称性によって，逆に平面を定義することもできる．すなわちふたつの互いに合同な，（テーブル面の中心にたてた軸に対して）回転対称性をもつテーブルがあるとしよう．もしこの一方のテーブルの対称軸の向きをさかさまにして他のテーブルの対称軸にかさねたとき，両方のテーブル面が完全にかさなるときは，これらのテーブルの表面は平面であると定義する．平面は一様である．すなわち $\boldsymbol{E}$ 上の点 A（これはいままでは $\boldsymbol{E}$ の“中心”であった）は，$\boldsymbol{E}$ 上のそれ以外の点とくらべて，いかなる



第１図

意味でも特別なものではない．すなわち他のすべての点とまったく同等である．つまりA以外の任意の点A′を通って1本の直線g'を引き，しかもA′においてこの新しい直線g'に直交するすべての直線が作る平面が$\boldsymbol{E}$そのものであるようにすることが必ず可能である．$\boldsymbol{E}$のすべての点A′から上のように垂直に出ている直線g'の全体は平行な直線のひとつの集団をつくる．この集団のなかには，われわれがそもそも最初に考えた直線gも含まれているが，これは集団のなかの他の直線にくらべて，なんら特別なものではない．この集団に属する直線は全空間を満たす．つまり空間の中の任意の1点は必ずこの集団に属する1本の，そしてただ1本の直線によって貫かれる．この事情は，はじめにとった点Aの（直線gの上における）位置には無関係である．すなわちA*をg上の他の任意の1点とする．A*でgに直交する平面は，gだけでなく上述の平行線集団のすべての直線を垂直に切る．g上のすべての点A*においてそれぞれgに直交する平面$\boldsymbol{E}^*$の全体は，互いに平行な平面の集団を作る．この集団もまた全空間を一重に，しかしすきまなく満たす．このようにして手にいれた空間の組み立てから直交座標系に到達するには，さらにもう一歩進む必要がある．しかしここでは，空間的並進の概念を明確にするために，この組み立てを用いることにする：並進とは直線gだけでなく，上述の平行線集団のすべての直線をそれぞれ自分自身の上に移す合同写像のことである．gの上の任意の点Aを同じ直線上の他の任意の点A*に移す並

進はひとつあり，またそのひとつに限る．

私はここで，並進の概念に到達するための第二の道を提示しよう．並進の主な特徴は，並進に対してすべての点がまったく同格であるということである．つまり並進に際して，一個の点のふるまいについて，その点だけがもち，他の点にはないような特別な客観的特性は存在しない（したがってまた並進に際しては，空間のすべての点は，単にその位置を，つまり“これはそこに”というように指示するだけで互いに区別される．これに対して，たとえば回転では軸上の点はその位置を変えないという特性によって，軸上にない点と区別される）．このような特徴を前提として，回転の概念とはまったく独立に，並進に対してつぎのような定義をあたえることができる．すなわちひとつの合同写像 I により任意の点 P が P′ に移るとき，PP′ を一組の連結点と呼ぶことにする．いま第二の合同写像 II が I によって生まれた連結点のすべてを，それぞれ同じ I によって生まれた他の連結点のどれかに（1 対 1 の対応で）移すならば II は I と**交換可能**（あるいは可換）とよばれる．ある合同写像に対して，必ずそれと可換な他の合同写像が存在し，しかも後者は任意の点 A を他の任意の点 B に移すことができるとき，はじめの合同写像を並進という．——ここでふたつの合同写像 I, II が互いに交換可能とは，上の定義から直ちにわかるように，写像 I, II をつづけて行なった結果生まれる合同写像が，I, II の順序を逆にしたもの，すなわち写像，II, I を行なった結果と同等であることを意味す

る．任意の点Aを他の任意の点Bに移すような並進はひとつ（また，同時に証明されるように，ただひとつ）だけ存在することは事実である．また$\boldsymbol{T}$をひとつの並進，A,Bは任意の2点とすれば，定義により，一般に$\boldsymbol{T}$と可換でAをBに移す合同写像が存在するばかりでなく，さらに上に述べた並進に対して要求される特別な性質をもった，AをBに移す合同写像，つまり**並進**も存在することは，またひとつの事実である．したがってひとつの並進はすべての並進と可換である．またすべての並進と可換なひとつの合同写像は必然的にそれ自身もまたひとつの並進である．このことからつぎのことが導かれる：すなわちふたつの並進を続けて行なった結果生ずる合同写像，またひとつの並進の“逆”（すなわち，その並進とちょうど逆の方向にずらす写像）はともに並進である．それゆえ，すべての並進は全体としてひとつの群をなす．すべての点を移動させない写像つまり恒等写像以外には，ひとつのきまった点Aをそれ自身に移す並進は存在しない．なんとなれば，もしそのような並進がPをP′に移すならば，定義によりAをPに移すと同時に，AをP′にも移すひとつの合同写像が存在しなければならない．それゆえPとP′は同じ点でなければならない．このことからAを他の一点Bに移すふたつの異なる並進はありえない．

並進の概念が回転のそれとは無関係に基礎づけられた以上，直線や平面に対するさきに述べたような，回転を基礎にした定義は，並進の概念に立脚した直線や平面の定義とま

さに対立することになる．いま $\boldsymbol{a}$ は点 A_0 を A_1 に移すひとつの並進とする．この並進により A_1 は A_2 に，また A_2 は A_3 に，……移される．また A_0 には他のある点 A_{-1} が移ってくる．さらに A_{-1} には別の A_{-2} が，……移る．このようにしてわれわれは，直線ではなくて，直線上に等間隔にならんだ点の列を得る．いま n をひとつの自然数とすれば，$\boldsymbol{a}/n$ もまたひとつの並進であり，それを n 回くりかえしたものがちょうど $\boldsymbol{a}$ である．そこでいま A_0 から出発して，$\boldsymbol{a}$ と同じように $\boldsymbol{a}/n$ を適用すれば，前と同じ直線上に，以前より n 倍だけ稠密に（すなわち前の間隔の $1/n$ の間隔で）等間隔にならんだ点列を得る．ここで n がすべての整数値をとることにすれば，このような点列は n が大きくなる程，点の密度も大きくなる．このようにして得られるすべての点は全体がとけあって，ひとつの 1 次元連続体になる．そして各点は各自がそれぞれ独立した存在であることを放棄して，この連続体のなかにはまりこむ（ここで私の議論は連続に対する直観にたよっている）．そこで，直線は，1 点にひとつの無限小並進とその逆並進を無限回くりかえしほどこすことによって作られるといってよかろう．一方平面は 1 本の直線 g を，他のもう 1 本の直線 h に沿って並進させることにより作られる．すなわちもし g と h が 2 本の異なる直線で，これらが 1 点 A_0 で交わっているならば，h を自分自身の上に移すようなすべての並進を g にほどこせばよい．このようにして g から作られるすべての直線は，g と h で決定される平面を作る．

われわれが合同写像という一般的な概念を，まず並進という概念にまで制限し，公理論的に幾何学を作る礎石としてそれを用いるとき初めて，幾何学の論理的構成には論理の順序が生まれる（§§2，3）．それによってわれわれはまず純粋に並進的な“アフィン”幾何学に到達する．つづいてこの幾何学のワクのなかで，再び合同という一般概念が導入されなければならない（§4）．以上に述べたようにわれわれは幾何学を構成するのに必要な支柱を直観からもらいうけたから，つぎの節では演繹的数学の領域にはいりこむことにしよう．

§2　アフィン幾何学の基礎

空間の並進（Translation），すなわち変位（Verschiebung）$\boldsymbol{a}$ を当分のあいだ，われわれはひとつのベクトルで表わすことにする．もちろんあとからこのベクトルという名前には，もっと一般的な概念を結びつけるであろう．変位 $\boldsymbol{a}$ により点PがQに移されることをつぎのようにいい表わす：すなわちQは，始点Pから突き出しているベクトル $\boldsymbol{a}$ の端点である．いまP, Qを任意の2点とすれば，PをQに移すひとつの，そしてただひとつの変位 $\boldsymbol{a}$ が存在する．これをP, Qで決定されるベクトルと呼び，それを $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で示す．

二つの並進 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ をつづいてほどこした結果うまれる並進 $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和と呼ばれる：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．和の定義からつ

ぎのことは容易に理解できる．1）ひとつのベクトルを整数倍すること（つまり並進のくりかえし），および整数で割ることの意味．2）ベクトル $\boldsymbol{a}$ をその逆 $-\boldsymbol{a}$ にかえる操作，すなわち $-$ の意味．3）ベクトル $\boldsymbol{0}$ とは何を意味するか．これはすべての点を移動させない並進，つまり“恒等写像”である．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ がなりたつことはすぐにわかる．さらに上に述べたことから，$\pm\frac{m}{n}\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$ という記号の意味もわかる．ここに m，n は任意の二個の自然数，また λ は比 $\pm\frac{m}{n}$ を示す．そこで連続の要求から，λ が任意の実数のときでもベクトル $\lambda\boldsymbol{a}$ をなんと解釈すればよいかわかるであろう．われわれは以下にアフィン幾何学の簡単な公理系をならべよう．

公理 I．ベクトル

任意のふたつのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は，これらの“和”としてひとつのベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を一意的に決定する；またひとつの数 λ とひとつのベクトル $\boldsymbol{a}$ からはひとつのベクトル $\lambda\boldsymbol{a}$ が一意的にきめられる．これを“$\boldsymbol{a}$ の λ 倍のベクトル”という（数の掛け算）．なおこれら二種の操作は以下の法則を満足するものとする．

α）加法

1．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（可換法則）

2．$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（結合法則）

3．$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ は任意の二つのベクトルとする．このとき $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ は，ひとつ在り，しかもただひとつに限る．この $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ の差，すなわち $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ で表わす

（引き算）.

β）かけ算

1. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=(\lambda\boldsymbol{a})+(\mu\boldsymbol{a})$（第 1 分配法則）
2. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$（結合法則）
3. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
4. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})+(\lambda\boldsymbol{b})$（第 2 分配法則）.

上の法則 β）にでてきた λ, μ が有理数のときは，有理数をベクトルに掛けるという演算は，さきにも述べたように，和の法則から導かれる．λ が任意の実数の場合にも，連続の原理にしたがって，λ が有理数のときになりたつ関係がそのまま成立するべきであると要求してもよいが，しかしここでは公理としてはっきりと公式化した．というのは，法則 β）をまったく一般的に，純粋に論理的に加法法則だけから導くことはできないからである．かけ算を加法から導くことを断念することにより，幾何学を公理論的に組みたてるに際して，連続性の困難を放逐することができる．なお β）の 4. は相似定理（Ähnlichkeitssatz）をまとめたものである．

γ）“次元公理” これをわれわれは，ここにつけ加えなければならないが，それについては後から公式化する．

公理 **II**. 点およびベクトル

1. 任意の **2** 個の点 A，B はひとつのベクトル $\boldsymbol{a}$ を決定する．これを記号で $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{a}$ とかく．A が任意の点，$\boldsymbol{a}$ は任意のベクトルとすれば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{a}$ を満足するひとつの，そしてただひとつの点 B が存在する．

2. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$ ならば $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ である．

上の公理には二種の範疇に属する対象，すなわち点とベクトルが登場している．またつぎの三つの記号

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a} \tag{1}$$

で表わされる基本的関係も上の公理には含まれている．この関係の助けをかりて，純論理的に定義できるすべての概念は，みなアフィン幾何学に含まれている．また上述の公理から純論理的に導かれるすべての定理はアフィン幾何学の体系を作る．すなわちこの体系は上述の公理系という礎石の上に演繹的に建設されることができる．それはとにかくとして，われわれの公理は，必ずしもそのすべてが，論理的に互いに独立ではない．たとえばベクトルの加法公理（**公理 I**α，**2** および **3**）は**公理 II**，すなわち点とベクトルの間の関係を規定する公理から導かれる．しかしわれわれにとってはつぎのことが大事である．すなわちベクトルに関する**公理 I** は，ベクトルだけに関するすべての事実（点とベクトルの間の関係を用いなくても）を**公理 I** から導くのに既に十分であるということである．

加法公理 **I**α から，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ を満足のするひとつの特別なベクトル $\boldsymbol{0}$ が存在することが導かれる．また**公理 II** からさらに，2 点 A, B が一致するとき，またそのときに限り，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は $\boldsymbol{0}$ となることも導きだされる．

O をひとつのきまった点とし，$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{0}$ と異なるひとつのベクトルとする．このとき $\xi\boldsymbol{e}$（ξ は任意の実数）のタイプ

のすべてのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の端点 P は 1 本の**直線**を形成する．この定義により，並進概念にもとづいて直線を定義しようとする立場は，ここにはじめて正確な，しかもアフィン公理系の基礎概念だけを用いた直線の定義をあたえられたことになる．上述の直線に対する定義において“座標” ξ が正数である点 P の全体は O から射出するひとつの半直線を形成し，また ξ が負である点は，残りの半直線を作る．いま $\boldsymbol{e}$ のかわりに $\boldsymbol{e}_1$ と書き，さらにもうひとつのベクトル $\boldsymbol{e}_2$ を考える．ただし $\boldsymbol{e}_2$ は $\xi\boldsymbol{e}_1$ の形には表わされないものとする．いま $\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2$ の形をしたすべてのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を作るとき，これらのベクトルの端点 P の全体はひとつの**平面**を形成する（1 本の直線を他の直線に沿って並進させることにより平面を構成した）．最後に O を貫いているが平面 $\boldsymbol{E}$ の上にはない 1 本の直線にそって平面 $\boldsymbol{E}$ を並進させると，この平面は全空間をかすめて通る．いまひとつのベクトル $\boldsymbol{e}_3$ が $\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2$ のタイプのベクトルではないとする．このとき任意のベクトルは，ひととおりの，そしてただひととおりの一次結合

$$\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\xi_3\boldsymbol{e}_3$$

によって表わされる．ここでつぎのような定義がうまれる：

つぎの式のすべての係数 ξ が同時に 0 のときに限って，ベクトル

$$\xi_1\boldsymbol{e}_1+\xi_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\xi_h\boldsymbol{e}_h \tag{2}$$

が $=\boldsymbol{0}$ となるとき，h 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_h$ は互いに**一次独立**であるという．この仮定（すなわち h 個のベク

トルが一次独立であるということ）のもとに，(2) の形で表わされるすべてのベクトルは全体としてひとつの h **次元線形ベクトル多様体**を作る．またこのベクトル多様体はベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_h$ により“張られる”という．h 次元線形ベクトル多様体 $\boldsymbol{M}$ については，その“基礎ベクトル” $\boldsymbol{e}_i$ の選びかたには無関係に，その特徴をつぎのようにいい表わすことができる：

1. $\boldsymbol{M}$ に属する二つのベクトルの和，また $\boldsymbol{M}$ に属するひとつのベクトルにひとつの数をかけること，この二種の演算の結果としてうまれるベクトルは再び $\boldsymbol{M}$ に属する．

2. $\boldsymbol{M}$ には h 個の互いに一次独立なベクトルの組が必ず存在する．しかしいかなる $h+1$ 個のベクトルも，必ず互いに一次独立ではありえない．

上述の特徴 2（これはさきにのべたわれわれの定義と，一次方程式に対する初等的な定理から導くことができる）から，このようなベクトル多様体にとって次元数 h は固有のものであり，これを張る特別な基礎ベクトルには無関係であることがわかるであろう．

ここで，前に述べた公理の一覧表におちていた“**次元公理**” γ）をつぎのように公式化しよう：

γ）n 個の一次独立なベクトルが存在する．しかし $n+1$ 個のいかなるベクトルも必ず一次独立ではない．

上の公理を“ベクトル全体は n 次元線形多様体を作る”といいかえてもよい．$n=3$ とすれば，これは空間[2)]に対するアフィン幾何学を導く．また $n=2$ なら平面，$n=1$ なら

直線の幾何学をあたえる．幾何学を演繹的にとりあつかうのには，n の値を特別にきめないでおくこと，したがって“n 次元幾何学”を展開するほうがむしろ都合がよい（その場合，直線，平面，空間はそれぞれ $n=1,2,3$ という特別な場合として，この一般論にふくまれることになる）．なんとなれば［ここではアフィン幾何学に対して，また後には，完全な幾何学（つまり距離の定義をもった幾何学）に対しても］空間の数学的構造のなかには，われわれが次元数 3 の場合に固執しなければならない理由はどこにも存在しないからである．公理の形にいい表わされた空間の数学的法則性にとっては，この次元数 3 ということはまったくの偶然としか見えない．体系的，演繹的な理論においては，われわれはこのようなことをのりこえて進まなければならない．以上のようにして導かれた n 次元幾何学という概念には，なおつぎの節で再び立ちもどる [2]．それよりまずわれわれは上に述べた定義をさらに補わなければならない．

O を任意の 1 点とする．h 次元線形ベクトル多様体に属するベクトル［それはすべて (2) の形に書きあらわされる］で，しかも O を始点とするすべてのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の端点 P の全体はひとつの h **次元線形点集合**を形成する．この点集合は点 O を原点とするベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_h$ によって

2) 訳者注：本書では単に空間というときは，3 次元の空間をさす．場合によってはわれわれのまわりにある序論に述べた意味での空間を意味する．

張られるという（1 次元のときは直線，2 次元のときは平面である）．点 O はこの線形集合にとってなんらの特別な役目をもつものではない：O′ をこの線形点集合の中の他の任意の 1 点とするとき，点 P としてこの集合に属するすべての点をとれば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ は同じベクトル多様体 $\boldsymbol{M}$ を一巡する．多様体 $\boldsymbol{M}$ に属するすべてのベクトルを，一方では，点 O から出ているベクトルによって表わし，また他方では他の点 O′ を原点とするベクトルとして表わすとき，それぞれの場合に作られる線形点集合は互いに**平行**であるという．直線の平行，平面の平行という定義は，この上述の，平行に対する一般的な定義のなかに含まれている．O を原点とする（2）のタイプのベクトルで，その係数 ξ が

$$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \xi_2 \leqq 1, \quad \cdots, \quad 0 \leqq \xi_h \leqq 1$$

という制限を満足するすべてのベクトルの端点から作られる h 次元線形点集合の特別な部分は，O を原点とするベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_h$ で張られた h 次元**平行多面体**と呼ばれる（1 次元のときは線分，2 次元なら平行四辺形である．——ここにあたえられるすべての概念はわれわれに直観的にあたえられた $n=3$ の場合に限らず，任意の n に対してなりたつ）．

1 点 O と，これを始点とする n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を一緒にしてひとつの座標系（$\boldsymbol{C}$）と呼ぶ．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，必ずただひととおりに

$$\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{e}_n \tag{3}$$

の形式に書きあらわされる．数 ξ_i を座標系（$\boldsymbol{C}$）を基準と

したときのベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分という．P を任意の 1 点とし $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を (3) の形で表わすとすれば，ξ_i をまた点 P の座標ともいう．アフィン幾何学ではすべての座標系は同格である．つまりひとつの座標系を他の座標系とくらべて特に区別するようなアフィン幾何学的な特性は存在しない．

$$\mathrm{O}'\,;\ \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \cdots, \boldsymbol{e}_n'$$

を第二の座標系とする．これと第一の系との間には

$$\boldsymbol{e}_i' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \boldsymbol{e}_k \tag{4}$$

が成り立つとする．ここに n^2 個の係数 α_{ki} は，$\boldsymbol{e}_i'$ が一次独立であるために，それの作る行列式は 0 となりえない．ひとつのベクトル $\boldsymbol{x}$ の第一の座標系における成分を ξ_i，第二のそれを ξ_i' とすれば，

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k' \tag{5}$$

という関係がなりたつ．これは，(4) を等式

$$\boldsymbol{x} = \sum_i \xi_i \boldsymbol{e}_i = \sum_i \xi_i' \boldsymbol{e}_i'$$

に代入すれば容易に導くことができる．$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を点 O′ の第一座標系からみた座標としよう．x_i を，任意の点の第一座標系における座標，x_i' を同じ点の第二座標系からみた座標とすれば，

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k' + \alpha_i \tag{6}$$

が成立する．なんとなれば，$x_i - \alpha_i$ はベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OO'}}$$

の第一座標系からみた成分であり，x'_i は第二系からみたそれであるから．点の座標に対する変換（6）は一次変換である．ベクトルの成分に対する変換（5）は，（6）から変数 x に無関係な項 α_i を棄てることによって導かれる．――アフィン幾何学を解析的に扱うことも可能である．その場合にはすべてのベクトルはその成分で，またすべての点はその座標で表わせばよい．点とベクトルの間になりたつ幾何学的な関係は，このような解析的扱いでは，それぞれの座標と成分の間になりたつ関係で表現される．しかもその関係は座標系の任意の一次変換に対してその形をかえない．

公式（5），（6）にはなおもうひとつの異なる解釈が可能である．すなわち，これらをあるひとつのきまった座標系におけるひとつの**アフィン写像**の表現であると見なしてもよい．いま任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を，それの“写像ベクトル” $\boldsymbol{x}'$ に対応させる規則，あるいは任意の点 P をそれの“写像点” P′ に対応させる規則が，基本的関係（1）を破らないときは，この対応の規則，つまり写像は一次写像，あるいは**アフィン写像**とよばれる．したがって写像ベクトルおよび写像点に対しても（1）と同じ関係式

$$\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{c}', \qquad \boldsymbol{b}' = \lambda \boldsymbol{a}', \qquad \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \boldsymbol{a}'$$

がなりたつ．さらに $\mathbf{0}$ でないベクトルの写像は決して $\mathbf{0}$ にはならない，いいかえると，2 個の点から同じ写像点が得られるのは，もとの 2 点が実は同一の点である場合に限ることも容易にわかる．ふたつの図形がアフィン写像によっ

て互いに移りうるとき，これらの図形はアフィン（擬似）(affin) であるという．これらの図形はアフィン幾何学の立場からみれば互いにまったく等しい．すなわちこれらの図形の一方にはあるが，他方には欠けているようなアフィン的特性は存在しない．したがってアフィン写像（あるいは線形写像）という概念がアフィン幾何学において演ずる役目は完全な幾何学（すなわち距離の定義をもつ幾何学）における合同概念のそれと同じである．後者ではこの合同概念はきわめて重要なものであった．一次独立なベクトルはアフィン写像によって再び一次独立なベクトルに移される．またひとつの h 次元線形点集合は同じ性質の点集合に移される：互いに平行な図形はやはり平行な図形に写像される；ひとつの座標系 $\mathrm{O}\,|\,\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は他のひとつの座標系 $\mathrm{O}'\,|\,\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ に移される．これら両座標系を結ぶ係数の組 α_{ki}，α_i は（4），（6）と同じ意味のものである．ベクトル（3）はアフィン写像によって

$$\boldsymbol{x}' = \xi_1 \boldsymbol{e}'_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}'_2 + \cdots + \xi_n \boldsymbol{e}'_n$$

になる．この式の $\boldsymbol{e}'_i$ に（4）を代入し，アフィン写像の表現としては，はじめの座標系 $\mathrm{O}\,|\,\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を基準にとったものを用いれば，任意のベクトルの成分 ξ_i と，その写像ベクトルの成分 ξ'_i の間には

$$\xi'_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k \qquad (5')$$

が成り立つ．また点 P は P′ に移るとすれば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{O'P'}}$ に写像される：いま P の座標を x_i，P′ のそれを x'_i

とすれば（5′）から

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k + \alpha_i \tag{6′}$$

となる．解析幾何学では線形の図形を点の座標を変数とした一次式で表わすのが普通である．このことについてはつぎの節でより詳細に論じよう．ここではアフィン写像の表現がよりどころとしている“一次形式”の基礎概念について述べる．ひとつの関数 $L(\boldsymbol{x})$ が——自変数 $\boldsymbol{x}$ はすべてのベクトルを一巡するものとする．また L の値は実数値に限る——，

$$L(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = L(\boldsymbol{a})+L(\boldsymbol{b}); \qquad L(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\cdot L(\boldsymbol{a})$$

という特性をもつとき L は**一次形式**と呼ばれる．ひとつの座標系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ においては，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の各成分 ξ_i はそれぞれひとつの一次形式である．$\boldsymbol{x}$ が（3）によってあたえられるとき，任意の一次形式 L に対して

$$L(\boldsymbol{x}) = \xi_1 L(\boldsymbol{e}_i)+\xi_2 L(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+\xi_n L(\boldsymbol{e}_n)$$

がなりたつ；そこで $L(\boldsymbol{e}_i)=a_i$ とおけば一次形式は成分を用いて

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$$

の形に書きあらわされる；ここで各 a_i は $\boldsymbol{x}$ には無関係な定数係数である．逆に一次形式は常に上の形であたえられる．いま h 個の一次形式 $L_1, L_2, \cdots, L_h$ があるとする．

$$\lambda_1 L_1(\boldsymbol{x}) + \lambda_2 L_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_h L_h(\boldsymbol{x}) = 0$$

が任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，恒等的になりたつのは，すべての $\lambda_i=0$ の場合に限るとき，これら h 個の L_i は一次独立で

あるという．x が n 次元ベクトルならば，$n+1$ 個の一次形式は必ず一次独立にはならない．

§ 3　n 次元幾何学の概念．線形代数．二次形式

空間の法則性を完全に数学的に調和のとれた形で理解するためには，特別な次元数 $n=3$ に固執することをやめなければならない．幾何学ばかりでなく，物理学でももっと驚くべきほどに，くりかえしつぎのことが明らかにされた．すなわちこの現実の世界を支配している自然法則をひとたびわれわれが見破るやいなや，われわれはそれを最も見とおしのよい簡潔さと，完全に調和のとれた数学的な関係として表現できるということである．上に述べた簡潔さと調和，それは今日の理論物理学にとっては欠くことのできないものであるが，それの意義をさらに追求，発展させることは，私には数学教育の中心的課題のひとつであるように思われる．それはわれわれにとって知識に対するより高度の満足をあたえる源泉である．私がここに試みるような簡単な原理的な形式で提示された解析幾何学は，上述の簡潔さと調和の意義について，はじめてひとつの，しかしなお不十分な概念をわれわれに示してくれる．しかしわれわれは，単にこのような目的だけのために，次元数 $n=3$ の制限をのりこえるのではない．実際，あとで物理学においては $n=4$ の場合が必要となる．これは相対性理論にもとづくものでそれによれば空間に時間が加わり，4 次元幾何学

が登場する．

多次元幾何学の考えを直観的に身近にもってくるためには，なにも降神術者の秘教の助けをかりる必要はない．例えば水素，酸素，窒素および炭酸ガスの一様な混合気体を考えてみよう．このような混合気体のある量をとれば，それはそれに含まれる各種のガスがそれぞれ何グラムあるかを提示することにより規定される．そこでこの混合気体のある量をそれぞれひとつのベクトルと名づけよう．このように定義されたベクトルの和は，ふたつの容器にはいっている混合気体をただそのままひとつの容器に一緒にいれることに相当する．したがってベクトルに関するわれわれの公理系 **I** は，その次元数 n を4としたとき，ここに考えた混合気体によって満足される．ただし負のガス量について論ずることを許すことにする．1グラムの純粋の水素，1グラムの酸素，1グラムの窒素，および1グラムの純粋な炭酸ガスは4個の互いに独立な“ベクトル”である．これらはひとつの座標系を構成し，任意の割合の混合気体の任意の分量は，これら4個のベクトルの一次結合で作られる．——もうひとつ別の例をあげよう．いま“そろばん”に似た道具を想像しよう．それは5本の平行な棒からできており，各棒はそれぞれ1個ずつ小さな球を串ざしにしていて，この球は棒にそってずらすことができるものとする．5個の小球がそれぞれ各自の棒の上のどこにいるかを指示することにより，この“そろばん”の状態は規定されるものとする．このように定義された状態をそれぞれ点と呼ぶことに

する．5 個の球をそれぞれ各自の棒にそって同時にずらす（各球のずらしの量はそれぞれまったく独立である）とき，このような操作をひとつの“ベクトル”と呼ぼう．このときは $n=5$ とした場合の公理 **I**，**II** のすべてがこの“そろばん”によって実現される．——以上の例から多次元幾何学の直観的な例をいくらでも作れることがわかる．その際適当に名前をつければ，公理 **I**，**II** は満足される．

上にあげた幾分遊び半分の例よりも，もっと大事なことはつぎのことである．すなわち**一次方程式の理論にとって，われわれの公理系はその演算の基礎を特徴づけるものである**ということである．いま α_i，α はあたえられた数とする．そのとき

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \tag{7}$$

は x_i の**一次同次方程式**，といわれ，

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha \tag{8}$$

は x_i の**一次非斉次方程式**といわれる．**一次同次方程式**の理論をあつかうのには，変数 x_i の値の一組に対して簡単な名前をつけると便利である．そこで値の一組をひとつのベクトルとよぼう．このようなベクトルの定義にしたがえば，2 個のベクトル

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{および} \quad (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

の和としては，ベクトル

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$

をとればよい．またベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の λ 倍は

$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$$

というベクトルを意味する．以上のように定義すれば，公理 **I**（n 次元の場合）は上述のベクトルに対して成立する，とくに

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$$
$$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

はひとつの一次独立なベクトル系を形成する．これを座標系としたとき，任意のベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の第 i 成分は数 x_i 自身となる．一次同次方程式の解についての基本定理はつぎのようにいい表わすことができる：いま $L_1(\boldsymbol{x})$, $L_2(\boldsymbol{x})$, $\cdots$, $L_h(\boldsymbol{x})$ を h 個の一次独立な一次形式とする．このとき，方程式の解 $\boldsymbol{x}$，すなわち

$$L_1(\boldsymbol{x}) = 0, \quad L_2(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \cdots, \quad L_h(\boldsymbol{x}) = 0$$

をすべて同時に満足する $\boldsymbol{x}$ の全体は，$(n-h)$ 次元の線形ベクトル多様体を形成する．

非斉次一次方程式の理論をあつかうには変数 x_i の値の一組を，むしろひとつの“点”とよぶほうが好都合である．いま点 x_i，および x_i' が方程式（8）の二組の解とすれば，これらの差

$$x_1' - x_1, \quad x_2' - x_2, \quad \cdots, \quad x_n' - x_n$$

は（8）に対応する同次方程式（7）の解である．そこで変数 x_i の二組の値の差を“ベクトル”とよぶことにする．このベクトルは 2“点”(x_i) および (x_i') により決定され，

ベクトルの和，ベクトルに数をかけることについて，上述の規則に従うことがわかる．その結果**公理 I, II はすべて満足される**．上に述べた特別な $\boldsymbol{e}_i$ と“原点” $\mathrm{O}=(0,0,\cdots,0)$ から作られる特別な座標系に対しては，任意の点 (x_i) の座標は，数 x_i 自身となる．また一次方程式の基本定理はつぎのようにいい表わされる：h 個の一次独立な一次方程式をすべて満足する点の全体はひとつの，$(n-h)$ 次元の線形点集合をなす．

以上のことからもわかるように，われわれは幾何学にたよらなくても，一次方程式の理論から出発して，きわめて自然な方法でわれわれの公理系に到達することができる．またそれに結びついたもっと広い概念をも構成することができることもわかるであろう．そればかりでなく，われわれが幾何学から導いた公理を基礎として，一次方程式の理論を展開することは，いろいろの点で目的にかなったことであろう（同次方程式に関する基本定理の公式化について上の例が示しているように）．このようにして構成された理論は，われわれの公理系を満足するいかなる演算体系に対しても，正しいものとして成立することになるであろう．それは単に“n 個の変数の組”に限らず，上述の公理系を満足するものであればなんでもよい．上述のようなより概念的な理論から，普通の，もともと数 x_i を扱う形式的な理論に移行することは容易に可能である．それにはひとつのきまった座標系を基礎におき，ベクトルや点のかわりに，成分や座標を用いればよい．

さて空間に対するアフィン幾何学がわれわれに教えてくれることは，空間がひとつの3次元線形多様体である（この言葉の意味は詳細な説明がなくともわかるであろう）ということだけである．§1で述べた個々の直観的な事実のすべては，この簡単なひとつの事実（すなわち3次元の多様体であるということ）の変装にすぎない．そこで，空間，空間的図形および空間的関係（これらが一緒になって幾何学を構成する）についての種々の陳述にとっては，上述のようなただひとつの共通な認識の基礎を示すだけで十分であるということになる．しかしこのことは逆に，数学が，空間の直観的本質の理解にはあまり関係がないことを示しているともいえる．つまり幾何学は，われわれのまわりの直観的空間と，前に例として挙げた“そろばん”の状態を表現する線形点集合や，混合気体の状態を示すベクトルの張る多様体，さらに一次方程式の解の張る多様体の間になんらの差異を設けるものではない．空間の本質を理解できるようにすること，あるいはなぜ，またいかなる意味で理解できないかを示すことは形而上学に残された問題である．空間に対して，われわれの得たすばらしく明晰なこの知識をわれわれ数学者は誇りとすることができる．しかし同時に，われわれの概念的な理論は空間の本質のある一面を，しかもきわめて表面的に，また形式的にしか把握していないということをわれわれは知るべきである．

アフィン幾何学から完全な計量幾何学に移るには線形代数からなお二，三の概念と事実を譲りうける必要がある．

それはすなわち**双一次形式**，および**二次形式**である．任意の 2 個のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のひとつの関数 $Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$ ならびに $\boldsymbol{y}$ のそれぞれについて一次式であるとき，Q を双一次形式と呼ぶ．ある定まった座標系を用いたさいに，$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ の成分をそれぞれ ξ_i，η_i とすれば，Q は

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k$$

の形になる．ここに a_{ik} は定数係数である．Q が，あるきまった $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{y}$ の如何にかかわらず恒等的に 0 となるのは，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のときに限るとき，Q は“縮退していない”という．このときは n 個の一次方程式

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i = 0$$

の解は $\xi_i=0$ に限ることになる．あるいはそれは行列式 $|a_{ik}| \neq 0$ の場合であるといってもよい．この説明から，行列式が $\neq 0$ であるという条件は任意の一次変換に対して不変であることがわかる．双一次形式 Q は，$Q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ のとき**対称**と呼ばれる．これは Q の係数についていえば $a_{ik}=a_{ki}$ という条件を意味する．任意の双一次形式 $Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ から，ただひとつのベクトル $\boldsymbol{x}$ を変数とする**二次形式**

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

を作ることができる．このような方法で，すべての二次形式は，ひとつの，そしてただひとつの**対称双一次形式**から作られる．上の例で作られた二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ は対称双一次

形式

$$\frac{1}{2}\Big\{Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+Q(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\Big\}$$

から，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ に等しいとおくことにより作られたものである．二つの異なる対称双一次形式から同じ二次形式は導かれないということを証明するのには，つぎのことを証明すれば十分である．すなわちひとつの対称双一次形式 $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ から作った二次形式 $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ に対して恒等的に $=0$ となるのは，もとの双一次形式が恒等的に 0（つまりその係数が全部 $=0$）のときにかぎるということである．このことは任意の対称双一次形式に対して成立する関係式

$$Q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+2\,Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+Q(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \qquad (9)$$

を使って証明できる．$Q(\boldsymbol{x})$ が任意のひとつの二次形式を示すとしたとき，$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は，何もそのつど注意しなくても，ひとつの対称双一次形式を示すものとし，もとの $Q(\boldsymbol{x})$ はこの双一次形式の $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ に等しくとった場合に相当するものと約束する．二次形式が“縮退していない”とは，もとの対称双一次形式が縮退していないことを意味する．任意のベクトル $\boldsymbol{x}\neq 0$ に対して常に $Q(\boldsymbol{x})>0$ のとき，二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ は**正定符号**と呼ばれる．正定符号の Q は縮退していないことは明らかである．なんとなればいかなる $\boldsymbol{x}\neq 0$ に対しても $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が，$\boldsymbol{y}$ について恒等的に 0 となるようにすることはできない．というのは $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ ととれば $Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ となるから．

§ 4　計量幾何学の基礎

アフィン幾何学から計量幾何学（距離の定義があたえられた幾何学）に移行するためには，もう一度，直観に教えを乞わなければならない．三次元空間においては，ふたつのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**スカラー積**（これを $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ という記号で示す）と呼ばれる量の作りかたをわれわれは知っている．すなわち，ひとつの単位ベクトルをきめたうえで，まず $\boldsymbol{a}$ の長さを測り，つぎに $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の上に垂直に射影したときの $\boldsymbol{b}$ の射影の長さを求め，これらの測定値をかけたものが $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ である．この場合，アフィン幾何学のように平行なベクトル（線分）の長さの比較ばかりでなく，互いに任意の方向をむいているベクトルに対してもその長さの比較ができるものとする．スカラー積に対してはつぎのような演算の法則がなりたつ：

$$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}), \qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}')\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}).$$

上と同様な関係式は第 2 因子 $\boldsymbol{b}$ についても成立する．さらに $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ もなりたつ．$\boldsymbol{a}$ の自分自身とのスカラー積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$ は，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ の場合をのぞいては，常に正で，$\boldsymbol{a}$ の長さの 2 乗に等しい．上の定義によれば，任意の 2 個のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のスカラー積は，$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ の対称双一次形式であり，またこれから導かれる二次形式は正定符号であることがわかる．以上から，ベクトルと簡単な合理的な方法で結びついている量は，ベクトルの長さではなく，長さの 2 乗，つまりベクトルのひとつの**二次形式**であるというこ

とがわかる．これこそピタゴラスの定理の本質をなすものである．さらに繰り返せば，スカラー積はひとつの対称双一次形式であり，それから導かれる二次形式がベクトルの長さの 2 乗をあたえる．そこでこれからつぎのように公理化する．

距離（計量）の公理：ひとつの $\mathbf{0}$ でない単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ をきめたとき，任意の二つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ はひとつの数値 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を決定する．この数値は $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の対称双一次形式であり，これから導かれる二次形式 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=Q(\boldsymbol{x})$ は正定符号である．また $Q(\boldsymbol{e})=1$ である．

Q を距離の基本形式（あるいは計量基本形式）と呼ぶ．そこでつぎの定義をする：**ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'$ に移すひとつのアフィン写像が，もし距離の基本形式を変えないとき，すなわち任意の $\boldsymbol{x}$ に対して**

$$Q(\boldsymbol{x})=Q(\boldsymbol{x}') \tag{10}$$

ならば，この写像を合同写像という．合同写像によって移された後の図形はもとの図形と合同である[3]という．ここに述べた公理論的な手法では，合同の概念は上のように定義されることになる．いまあるひとつの演算の体系があるとする．それは§2 にあたえた公理系を満足しているとする．そこでこの体系において，われわれは任意にひとつの

3)　ここでわれわれはもとの図形とそのままで等しい図形，および“裏がえし”の意味で等しい図形をともに合同であると呼び，両者を区別しない．既にアフィン変換においても，また n 次元のときでも，三次元空間の場合と同じように，上述の区別をしなかった．

正定符号の二次形式を作ることができる．これをこの系の距離の基本形式とみなすことにする．これをもとにすれば，合同の概念は，ちょうど上に述べたように定義される．このようにしてもとのアフィン空間にはこの基本形式によって距離（計量）が持ちこまれたことになる．しかもいまやユークリッド幾何学のすべてがそこでは成立することになる．しかし，われわれが上のようにして導いた理論は，特別な次元数に対してだけ成立するものではなく，次元数には無関係である．§3 の (9) を使うと，上の (10) から，合同写像に対して

$$Q(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が一般的に成立することが導かれる．

合同の概念は距離の基本形式によって定義されるものであるから，幾何学的量の大きさに関係するすべての公式に基本形式が登場しても不思議ではない．二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ は

$$Q(\boldsymbol{a}) = Q(\boldsymbol{a}')$$

のときにかぎって，互いに合同である．そこでわれわれは $Q(\boldsymbol{a})$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ のひとつの尺度と考えてよかろう．しかし実際には，われわれはこの量のかわりに $Q(\boldsymbol{a})$ の正の平方根を $\boldsymbol{a}$ の尺度として用い，それを $\boldsymbol{a}$ の長さ（これが今は長さの定義である）と呼ぶ．これにより，二つの平行でしかも同じ方向をむいたベクトルの和の長さは個々のベクトルの長さの和に等しいという条件も満足されていることがわかる．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ならびに $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$ はすべて長さ 1 の

ベクトルとする．もし

$$Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = Q(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')$$

ならば，またこのときにかぎって $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ から作られる図形と $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$ から作られる図形とは合同である．しかしこの場合にも数 $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 自身を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る“角”に対する尺度とはしない．“角”としては

$$\cos\theta = Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

で定義される量 θ を用いる．この定義は，同じ平面上にある二つの角を隣り合せにおいたとき，合成されたものに対する θ が，それぞれの“角”を示す θ の和に等しいという条件を満足する．なお $\boldsymbol{0}$ でない任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る角 θ は

$$\cos\theta = \frac{Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\sqrt{Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\cdot Q(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}} \tag{11}$$

であたえられる．特に $Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ のとき二つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は直交するという．以上述べたような解析幾何学の最も簡単な，距離に対する公式を思い起こすだけでここの議論には十分である．

（11）により定義された二つのベクトルの間の角が常に実数であることはつぎの事実にもとづく．すなわち正定符号の任意の二次形式 Q に対して不等式

$$\{Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\}^2 \leqq Q(\boldsymbol{a})\cdot Q(\boldsymbol{b}) \tag{12}$$

が成立するということである．この不等式を最も簡単に証明するには，任意の実数 λ，μ に対して

$$Q(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}) = \lambda^2 Q(\boldsymbol{a}) + 2\lambda\mu Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \mu^2 Q(\boldsymbol{b}) \geqq 0$$

という不等式が成立することを用いればよい．この λ，μ に対する二次式は決して負にはならないから，その判別式 $\{Q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\}^2-Q(\boldsymbol{a})\cdot Q(\boldsymbol{b})$ は正にはなりえない．

n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対して，つぎの条件が成立するときは，これらはひとつの**直交座標系**を作る．その条件とは任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

の形に表わすとき

$$Q(\boldsymbol{x})=(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_n)^2 \tag{13}$$

が成立することである．すなわち

$$Q(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_k)=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$$

が成立することである．直交座標系は計量幾何学の立場から見れば，すべて同等である．さて上述のような直交座標系が存在することを，われわれの幾何学的直観に密接に結びついた形でこれから証明しよう．その場合，単に正定符号の二次形式に対してだけでなく，もっと一般的に，任意の縮退していない二次形式に対して直交座標系の存在を証明しよう．というのは相対性理論では定符号でない二次形式が非常に重要な役目をするからである．そこで証明すべきことを定理の形で述べると：

任意の縮退していない二次形式 Q に対して，つぎのような座標系 $\boldsymbol{e}_i$ を設けることができる．すなわち任意のベクトル

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

に対して，Q が

$$Q(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_1(x_1)^2 + \varepsilon_2(x_2)^2 + \cdots + \varepsilon_n(x_n)^2$$
$$(\varepsilon_i = +1 \text{ または } -1) \tag{14}$$

の形となるような座標系である．

証明：まずひとつの任意のベクトル $\boldsymbol{e}_1$ を選ぶ．ただし $Q(\boldsymbol{e}_1) \neq 0$ とする．この $\boldsymbol{e}_1$ に適当な正の定数をかけて $Q(\boldsymbol{e}_1) = \pm 1$ にすることは必ずできる．つぎに任意のベクトル $\boldsymbol{x}^*$ をとる．ただしこれに対して，$Q(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}^*) = 0$ が満足されるように $\boldsymbol{x}^*$ をえらぶ．このとき $\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{e}_1$ に直交するということにする．いま x_1 を任意の実数として

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{x}^* \tag{15}$$

とおけば，これに対してピタゴラスの定理：

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= x_1^2 Q(\boldsymbol{e}_1) + 2x_1 Q(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}^*) + Q(\boldsymbol{x}^*) \\ &= \pm(x_1)^2 + Q(\boldsymbol{x}^*) \end{aligned}$$

が成立する．さて $\boldsymbol{e}_1$ に直交するすべてのベクトルはひとつの $n-1$ 次元のベクトル多様体を作る．しかもそこでも $Q(\boldsymbol{x}^*)$（$\boldsymbol{x}^*$ はこの $n-1$ 次元の多様体に属するベクトル）が縮退していないことは容易にわかる．ところでこの定理が次元数 $n=1$ のとき成立することは自明である．そこでいまこれが $n-1$ 次元のときに成立すると仮定して，$n-1$ の場合から n の場合に成立することを示そう．この仮定から，$\boldsymbol{e}_1$ に直交する $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が存在し，

しかもこれらを用いると

$$\boldsymbol{x}^* = x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{e}_n$$

に対して

$$Q(\boldsymbol{x}^*) = \pm(x_2)^2 \pm \cdots \pm (x_n)^2$$

が成立することになる．この結果を使うと $Q(\boldsymbol{x})$ に対して望み通りの結果が導かれる．なお

$$Q(\boldsymbol{e}_i) = \varepsilon_i, \qquad Q(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = 0 \qquad (i \neq k)$$

であることも容易にわかる．この関係から，$\boldsymbol{e}_i$ はすべて互いに一次独立であり，また任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は (3) の形に書きあらわされることも証明できる．さらにそのとき x_i はつぎの式であたえられる：

$$x_i = \varepsilon_i Q(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}). \tag{16}$$

Q が定符号でないときは重要な定理を追加しなければならない：ε_i のなかで ＋ および － となるものの，個数をそれぞれ r, s とするとき，r, s は Q により一意的にきまる．この場合，Q は r 正次元と s 負次元をもつとよぶことにする（普通 s を Q の慣性指数（Trägheitsindex）といい，ここに太字で書かれた定理は慣性定理（Trägheitsgeseltz）といわれる．また二次曲面の分類はこの定理にもとづくものである）．正，負の次元数 r, s はつぎのように座標系のとりかたに無関係な形で特徴づけることができる：

r 個の互いに直交するベクトル $\boldsymbol{e}$ が存在し，それらはすべて $Q(\boldsymbol{e}) > 0$ を満足する；しかし $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ がこれらの $\boldsymbol{e}$ のいずれとも直交するときは，必ず $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ となる．——換言すればここに述べたようなベクトル $\boldsymbol{e}$ は

r 個以上存在しない．同じような定理は負の次元数 s についても成立する．

この定理を証明しよう．まずこのようなベクトル $\boldsymbol{e}$ が r 個存在することは（14）の基礎に用いた座標系の基礎ベクトルのうちで，正の ε_i に対応する r 個の $\boldsymbol{e}_i$ を見ればあきらかである．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ のこれに対応する成分 x_i は $\boldsymbol{x}$ のひとつのきまった一次式：$x_i = L_i(\boldsymbol{x})$［（16）を参照］であたえられる．そこでいま一般的に r 個の互いに直交するベクトル $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ があり，〔訳者注：これは座標系の基礎ベクトルであるとは限らない〕，これらはすべて $Q(\boldsymbol{e}_i)>0$ を満足するとしよう．これらすべての $\boldsymbol{e}_i$ に直交するひとつのベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．いま $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{e}_i$ の一次結合

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{e}_r + \mu \boldsymbol{x}$$

を作る．ただしこの係数のすべてが同時に 0 となる場合を除く．ここで $\boldsymbol{y}$ は r 個の条件

$$L_1(\boldsymbol{y}) = 0, \quad L_2(\boldsymbol{y}) = 0, \quad \cdots, \quad L_r(\boldsymbol{y}) = 0$$

を満足するものとする．この条件から $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ の場合をのぞいて $Q(\boldsymbol{y})<0$ となる[4)]．さらに上の直交の仮定から

$$Q(\boldsymbol{y}) - \{(\lambda_1)^2 \cdot Q(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + (\lambda_r)^2 Q(\boldsymbol{e}_r)\} = \mu^2 Q(\boldsymbol{x})$$

がなりたつ．この左辺は，$\boldsymbol{y}=0$ で同時に $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ の場合以外は必ず負である．したがってそのような例外をのぞいては $Q(\boldsymbol{x})<0$ となる．この例外の場合には，上の係数についての仮定から $\mu \neq 0$，したがって $\boldsymbol{x}=0$ となる．それゆえ $\boldsymbol{x}=0$ の場合を除き $Q(\boldsymbol{x})<0$ となる．　証明おわ

り.

相対性理論では負次元数が 1，正次元数が $n-1$ の場合が大事である．3 次元空間で，アフィン座標を使って原点を頂点とする円錐の方程式を書くと，つぎのようになる．

$$-(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=0.$$

これは x_1 の符号によって区別される二つの円錐を示しそれらの頂点は原点で一致している．円錐がこのように二つに分かれることは相対性理論では，過去と未来の対立をあたえる．ここでは連続性に対する特徴を用いる代わりに初等的な解析的方法でこれを記述することを試みてみよう．いま Q は負次元数が 1 である縮退していない二次形式とする．ひとつのベクトル $\boldsymbol{e}$ を考え，これは $Q(\boldsymbol{e})=-1$ を満足するものとする．$Q(\boldsymbol{x})\leqq 0$ となる任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ を“負ベクトル”と呼ぶことにしよう．上に述べた慣性定理の証明によれば，$Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x})=0$ を満足する負ベクトル $\boldsymbol{x}$ は存在しない．そこで任意の負ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x})<0$ か $Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x})>0$ かに応じて二つの類，あるいは“円

---

4) 訳者注：いま座標系を $\boldsymbol{u}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とし，

$$Q(\boldsymbol{u}_i)=\varepsilon_i=+1 \quad (i=1,2,\cdots,r)$$
$$Q(\boldsymbol{u}_k)=\varepsilon_k=-1 \quad (R=r+1,\cdots,n)$$

とする．$\boldsymbol{y}$ をこの座標系を用いて表わせば

$$\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{u}_i, \qquad y_i=\varepsilon_i Q(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{y})=L_i(\boldsymbol{y}).$$

これに上の仮定 $L_i(\boldsymbol{y})=y_i=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$，を用いれば

$$Q(\boldsymbol{y})=\sum_{k=r+1}^{n}(y_k)^2\cdot Q(\boldsymbol{u}_k)\leqq 0.$$

これが $Q(\boldsymbol{y})=0$ となるのはすべての y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が 0 となるときにかぎる．

錐”に分類される．$\boldsymbol{e}$ 自身は前者に，$-\boldsymbol{e}$ は後者に属する．ひとつの負ベクトル $\boldsymbol{x}$ は，$Q(\boldsymbol{x})<0$ か $=0$ かに応じて“円錐の内側に”，または“円錐面上に”あるといわれる．ところでこの円錐，または $\boldsymbol{x}$ の類別が $\boldsymbol{e}$ の選びかたには無関係であることを証明する必要がある：まず $\boldsymbol{e}$ と同じような性質をもつ第二のベクトル $\boldsymbol{e}'$ を考える．いま目的としている事を証明するには $Q(\boldsymbol{e}',\boldsymbol{x})/Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x})$ と $-Q(\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e})$ とが同符号であることを証明すれば十分である．これは $Q(\boldsymbol{e})=Q(\boldsymbol{e}')=-1$，および $Q(\boldsymbol{x})\leqq 0$ から以下に示すように導かれる．まず任意の負ベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^*$$

の形に表わす．$\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{e}$ に直交する部分である．慣性定理から $Q(\boldsymbol{x}^*)\geqq 0$．これを Q^* とかくことにすれば，

$$Q^*=x^2+Q(\boldsymbol{x})=\{Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x})\}^2+Q(\boldsymbol{x}).$$

この Q^* は縮退している場合をのぞけば，$\boldsymbol{x}$ の二次形式で（これを $Q^*(\boldsymbol{x})$ と記す），しかも $\boldsymbol{x}$ に対して恒等的に $Q^*(\boldsymbol{x})\geqq 0$ $\boldsymbol{x}$ のかわりに $\boldsymbol{e}'$ とおけば同じような関係がなりたつ．すなわち

$$Q(\boldsymbol{x})=-x^2+Q^*(\boldsymbol{x})\leqq 0,\quad Q(\boldsymbol{e}')=-(\mathrm{e}')^2+Q^*(\boldsymbol{e}')\leqq 0,$$

$$\{x=-Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x})\},\quad \{e'=-Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}')\}.$$

正定符号の二次形式 Q^* についてなりたつ不等式（12）と上の関係から

$$\{Q^*(\mathrm{e}',\boldsymbol{x})\}^2\leqq Q^*(\mathrm{e}')\cdot Q^*(\boldsymbol{x})<(\mathrm{e}')^2\cdot x^2.$$

ここで

$$Q^*(\mathrm{e}',\boldsymbol{x})=Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}')Q(\boldsymbol{e},\boldsymbol{x})+Q(\mathrm{e}',\boldsymbol{x})$$
$$=\boldsymbol{e}'x+Q(\mathrm{e}',\boldsymbol{x})$$

に注意．あるいは，

$$-Q(\mathrm{e}',\boldsymbol{x})=e'x-Q^*(\mathrm{e}',\boldsymbol{x}).$$

上に求めた不等式から，$-Q(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{x})$ の符号は最後の式の右辺第一項と同符号になることがわかる．

ここで再びわれわれにとって興味のある正定符号をもつ距離の基本形式の場合に立ちもどる．合同写像を表現するために直交座標系を用いれば，§2の公式（5′）の係数 α_{ik} は

$$(\xi_1')^2+(\xi_2')^2+\cdots+(\xi_n')^2=(\xi_1)^2+(\xi_2)^2+\cdots+(\xi_n)^2$$

が ξ に対して恒等的になりたつべきであるという制限をこうむる．それは直交条件

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ri}\alpha_{rj}\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{17}$$

である．これによれば，ひとつの合同写像からその逆写像を求めるには，写像の係数 α_{ik} を α_{ki} にかえればよいことがわかる：すなわち

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{n}\xi_k'\alpha_{ki}.$$

なお（17）から，合同写像の係数から作られる行列式 $\Delta=|\alpha_{ik}|$ はその逆行列式に等しい，したがって $\Delta^2=1$, あるいは $\Delta=\pm1$ であることがわかる（本来の合同写像の時は $+1$，鏡像を含む時は -1 となる）．

計量幾何学を解析的にあつかうのに二つの可能性がある．そのひとつは基礎に用いるアフィン座標系に何の制限も設けない方法である．この場合には任意の一次変換に対する不変論を展開することになる．ただし任意の変換といってもアフィン幾何学とはちがい，ここで扱う変換に対してひ

とつのきまった不変二次形式，すなわち距離の基本形式

$$Q(x) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\xi_i\xi_k$$

が，不変でなければならないという規定がある．もうひとつの立場は，元来，直交座標系だけを用いるものである．したがって直交変換，つまり変換の係数が条件（17）を満足するような一次変換に対する不変論を扱うことになる．しかし，後にユークリッド幾何学をこえて，もっと一般的な幾何学を展開できるように，ここではわれわれは第一の方法を採る．この第一の方法のほうが代数的にも簡単である．というのは，ただ直交変換に対してだけ不変となるような数式よりも，すべての一次変換に対して不変にたもたれる数式を探すほうが，容易であるから（直交変換は全一次変換のひとつの類に相当する．しかし副条件をつかって一般の変換を制限することにより前者を定義することは容易ではない）．本書では不変論を，単に幾何学的な法則ばかりでなく物理学の法則をも便利な数学的な形式で表現できるように，“テンソル算”として以下に展開してみせる [3].

§ 5　テンソル

二つの一次変換 $\xi^i \to \bar{\xi}^i$，$\eta_i \to \bar{\eta}_i$ が

$$\xi^i = \sum_k \alpha^i_k \bar{\xi}^k, \quad (|\alpha^i_k| \neq 0) \tag{18}$$

$$\eta_i = \sum_k \breve{\alpha}^k_i \bar{\eta}_k, \quad (|\breve{\alpha}^i_k| \neq 0) \tag{18'}$$

で与えられるとき，もし双一次形式 $\sum_i \eta_i \xi^i$ が（これを単位形式という）不変ならば，すなわち

$$\sum_i \eta_i \xi^i = \sum_i \bar{\eta}_i \bar{\xi}_i \tag{19}$$

が成り立つときは，(18)，(18′) であたえられる両変換は互いに**反傾**（kontragredient）と呼ばれる．この定義でわかるように反傾の関係は相互的である．いま一対の互いに反傾な変換 A，$\breve{A}$ によって ξ，η がそれぞれ $\bar{\xi}$，$\bar{\eta}$ に移り，さらに第二の反傾な変換 B，$\breve{B}$ によって，$\bar{\bar{\xi}}$，$\bar{\bar{\eta}}$ に移るとすれば

$$\sum_i \eta_i \xi^i = \sum_i \bar{\eta}_i \bar{\xi}^i = \sum_i \bar{\bar{\eta}}_i \bar{\bar{\xi}}^i$$

がなりたつ．したがって合成された変換 $\xi \to \bar{\bar{\xi}}$，$\eta \to \bar{\bar{\eta}}$ は互いに反傾である．互いに反傾な一組の変換の係数は

$$\sum_r \alpha_i^r \breve{\alpha}_r^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \tag{20}$$

という関係を満足する．(19) の左辺の ξ に (18) を代入して $\bar{\xi}$ で書くと，

$$\bar{\eta}_i = \sum_k \alpha_i^k \eta_k \tag{21}$$

が導かれる．これを η について解けば (18′) となる．したがって，ひとつの一次変換に対して必ずひとつの，しかもただひとつの反傾な変換が存在する．(21) を導いたと同様の推論により

$$\bar{\xi}^i = \sum_k \breve{\alpha}^i_k \xi^k$$

も導かれる．これと（21）を（19）に代入すれば，変換の係数は（20）のほかに

$$\sum_r \alpha^i_r \breve{\alpha}^r_k = \delta^i_k \qquad (20')$$

をも満足することがわかる．ある一次変換が自分自身に反傾な場合これは直交変換である．ひとつの一次形式の変数 ξ^i を，一次変換により移される新しい変数 $\bar{\xi}^i$ を使って書きあらわすと，新しい係数は，この一次変換に反傾な変換をもとの係数にほどこした結果と一致する．これを，係数は ξ に反変（kontravariant）な変換をこうむるともいう．

今までひとつの変位 $\boldsymbol{x}$ は，ひとつのアフィン座標系 O；$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を基準として，$\boldsymbol{x}$ により一意的にきまる成分 ξ^i によって，つぎのように書きあらわした：

$$\boldsymbol{x} = \xi^1 \boldsymbol{e}_1 + \xi^2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \xi^n \boldsymbol{e}_n.$$

いま他のひとつの座標系 $\bar{O}$；$\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2, \cdots, \bar{\boldsymbol{e}}_n$ を基準にする場合を考えてみよう．ここに e と $\bar{e}$ の間には

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = \sum_k \alpha^k_i \boldsymbol{e}_k$$

という関係があるとする．このときは $\boldsymbol{x}$ の成分は

$$\boldsymbol{x} = \sum_i \xi^i \boldsymbol{e}_i = \sum_i \bar{\xi}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i$$

から導かれる変換則

$$\xi^i = \sum_k \alpha^i_k \bar{\xi}^k$$

にしたがって変換される．つまり ξ は座標系の基礎ベクトルの変換に反傾に変換される．いいかえれば基礎ベクトルの変換に反変な変換をこうむる．それゆえ ξ^i はベクトル $\boldsymbol{x}$ の**反変成分**（kontravariante Komponente）と呼ばれる．しかし計量空間（距離空間）（metrische Raum）では，変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，座標系を基準として，それの基礎ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{x}$ のスカラー積の値

$$\xi_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i$$

によって表わすこともできる．他の座標系を基準とするとき，この量は——その定義から容易にわかるように——基礎ベクトル自身と同じ様に，つまり基礎ベクトルに共傾（kogredient）に変換される．すなわち変換則は

$$\bar{\xi}_i = \sum \alpha^k_i \xi_k$$

である．このふるまいを“**共変**”といい，したがって ξ_i を $\boldsymbol{x}$ の**共変成分**（kovariante Komponente）と呼ぶ．共変ならびに反変成分の間の関係はつぎの式であたえられる：

$$\xi_i = \sum_k (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)\xi^k = \sum_k g_{ik}\xi^k, \qquad (22)$$

あるいはこれを ξ^k について解いて

$$\xi^k = \sum_i g^{ki}\xi_i. \qquad (22')$$

直交座標系では共変成分は反変成分と一致する．——ここでなお一度，つぎの点を強調しておきたい．すなわちアフ

ィン空間ではただ反変成分だけが用いられる．したがって今後，変位ベクトルの成分が問題になるときは，特に注意がないかぎり，それはいままでと同じように反変成分であると了解しなければならない．

われわれは既に任意のひとつ，または二つの変位ベクトルの一次形式について知っている．そこでこれから2個以上，つまり3, 4, …個のベクトルの高次形式に移ろう．例として3個のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ のそれぞれについて一次形式となっている量（Trilinearform．これを三・一次形式と訳すことにする）$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を考えよう．いま任意のひとつの座標系を基準として，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ はその反変成分 ξ^i，η^i で，また z はその共変成分 ζ_i で表現すれば，A はこれら3個の変数列の三・一次形式：

$$\sum_{ikl} a^l_{ik} \cdot \xi^i \eta^k \zeta_l \tag{23}$$

となる．他の座標系を基準にとればこの A は，上の式と似た

$$\sum_{ikl} \bar{a}^l_{ik} \cdot \bar{\xi}^i \bar{\eta}^k \bar{\zeta}_l \tag{23$'$}$$

となる．この（23）と（23′）の係数の間にはひとつの関係がなりたつ．それは ξ, η を基礎ベクトルに反傾に，また ζ を共傾に変換して $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ に移すことにより得られる．この関係をもとにして，もとの係数 a^l_{ik}，および変換係数 α^k_i がわかっていれば，A の新しい係数 $\bar{a}^l_{ik}$ は計算できる．このようにして計量幾何学にかぎらず，アフィン空間でも成

りたつ“r 重に共変，s 重に反変の $r+s$ 階テンソル”という概念に到達したことになる．これの定義を抽象的に以下にあたえよう．しかし簡単のために上にあげた例のように，$r=2,\ s=1,\ r+s=3$ の場合に限ることにする．

3 組の変数列から作られた，座標系に依存するひとつの三・一次形式は，座標系の変換に対するそのふるまいが以下のような場合に，**2** 重に共変，**1** 重に反変の **3** 階テンソルと呼ばれる．すなわちこの三・一次形式は，二つの座標系を基準とするとき，それぞれ

$$\sum a^l_{ik}\xi^i\eta^k\zeta_l, \qquad \sum \bar{a}^l_{ik}\bar{\xi}^i\bar{\eta}^k\bar{\zeta}_l$$

のように書きあらわされる．座標系の変換にさいして ξ，η を基礎ベクトルに反傾に，また ζ を共傾に変換すれば上の左の形式から右の形式に移る．この三・一次形式の係数 a^l_{ik} を，ある座標系を基準に用いたときのこのテンソルの成分という．さらにこれは添字（ik）について共変，l について反変であるという．これは ξ^i，η^k，ζ_l のそれぞれと反傾に結びついている．

上の名前のつけかたはつぎのことを考えると妥当であることがわかる．すなわち普通の一次形式のときは，その変数が基礎ベクトルの変換に対して反傾な変換をこうむるときは，その係数は共変のテンソル成分としてふるまい，変数が共傾に変換されるときは，反変テンソル成分としてふるまう．以上の約束からわかるように，今後共変性を示す添字は常にテンソル成分の下側につけ，反変的添字は上側につけることにする．そこで下側についた添字は基礎ベクト

ルの変換と常に共傾に変換されることを示し，上側の添字は反傾に変換される．あるひとつの座標系を基準にしてひとつのテンソルの各成分があたえられれば（もちろん座標系自身は与えられていると仮定する）このテンソルは完全にわかったことになる．これらの成分の値は自由にわれわれが指定できるものである．さてテンソル算が問題にすることは座標系の選びかたに無関係なテンソルの特性や，テンソルの間の関係を調べることである．幾何学や物理学では，ひとつの量が，座標系に上述のようなやりかたで依存する代数的な一次形式を一意的に，また任意性なしに決定することができ，また逆にこの一次形式をあたえることにより，この問題の量自身が完全に規定されるとき，本来のテンソルの意味を少し変えて，この量自身をテンソルと呼ぶ．上の例にでてきた三つの変位ベクトルの関数を考えてみるに，これは各変数に対してそれぞれ一次同次式である．そこでこれはひとつの 3 階テンソルといえる．しかもこれは 2 重に共変，1 重に反変のテンソルである．距離空間では，この量をひとつの 0 重の共変テンソルとするか，また 1 重，2 重，あるいは 3 重の共変テンソルとして表現するかはわれわれの自由である．しかしアフィン空間では，ただ 3 階の共変テンソル（つまり 0 重の反変性と 3 重の共変性をもったテンソル）として表現できるだけである〔訳者注：距離の定義をもたないアフィン空間では変数列 ξ, η, ζ はただ反変性のものだけが存在するからである〕.

これから二，三の例により上の一般的な定義を説明しよ

う．その際，われわれはアフィン的立場に依然として固執することにする．

1)　任意のひとつの座標系を基準として，ひとつの変位ベクトル $\boldsymbol{a}$ をその（反変）成分 α^i で表わし，それを変数 ξ_i のつぎのような一次形式

$$\alpha^1\xi_1+\alpha^2\xi_2+\cdots+\alpha^n\xi_n$$

に対応させる．ここで ξ_i は座標系の変換に対して基礎ベクトルと共傾に変換されるものとする．このようにしてひとつの 1 階反変テンソルがうまれる．今後は“ベクトル”という名前を“変位”（または推進）に対する同意語としては用いないことにする．むしろベクトルは“1 階のテンソル”の同意語として用いる．したがって**変位はひとつの反変ベクトル，または 1 階の反変テンソルである**ということになる．同じことは運動している点の**速度**についてもいえる；なんとなれば速度は，無限小時間 dt のあいだに点がうごいた無限小の変位を dt で割ったものであるから（正確には $dt\to 0$ の極限をとる）．ここに述べたベクトルという言葉の使いかたは普通の用法と一致している．すなわち後者によれば，単に変位ばかりでなく，変位によって一意的に，また任意性なしに表わされるすべての量（もちろん尺度の単位はきめてあるものとする）がベクトルという言葉であらわされる．

2)　力も変位と同じように表現されるという点に，力の幾何学的な特徴があらわれていると思う．しかし力のこのような表現は，力の物理的本質をよりよく表わしているも

のと信じられている現代的な考えと対立する．なんとなればこの新しい考えは，仕事の概念にその基礎をおいており，仕事は新しい物理学では力の概念のかわりに，決定的な第一義的なものとしてより明瞭に前景にうかび出てくるものである．そこでひとつの座標系 O；$\boldsymbol{e}_i$ において**力の成分**として数 p_i を導入する．これは力の作用点を仮に $\boldsymbol{e}_i$ だけ変位させたときに，どれだけの仕事をこの力がなすかを示す量である．この数により力は完全に規定される；作用点の任意の移動

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{e}_1+\xi^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\xi^n\boldsymbol{e}_n$$

に対してこの力がなす仕事は $=\sum_i p_i\xi^i$ となる．いま他の座標系を用いればおなじ仕事が

$$\sum_i p_i\xi^i=\sum_i \bar{p}_i\bar{\xi}^i$$

で表わされる．ただしここで変数 ξ^i は，その上側についた添字の示すように，座標系に反傾に変換されるとする．この等式から**力はひとつの共変ベクトル**であることがわかる．もし現在用いているアフィン幾何学の立場から計量幾何学の立場に移るならば，力に対するこの表現と従来の変位による表現との関係が議論できるようになる．共変ベクトルの成分は，新しい座標系に移るさいに基礎ベクトルの変換に共傾な変換をうける．

注意

ひとつの共変ベクトル，およびもうひとつの反変ベクトルの成分をそれぞれ a_i，b^i とすれば $\sum_i a_ib^i$ はこれら二つ

のベクトルだけによってきまり，座標系のとりかたには無関係な数である．これは不変なテンソル演算の一例である．テンソルの体系では，数や**スカラー**は 0 階のテンソルとしてテンソルの仲間にはいる．　　　　　　　　（注意おわり）

二つの変数列 ξ, η の双一次形式はいかなるときに対称といわれるか，また対称双一次形式はいかなるときに縮退をしていないかについては既に以前に説明された．ところで双一次形式 $F(\xi, \eta)$ が ξ と η をいれかえたとき，その値が以前と逆符号になるとき，つまり：

$$F(\eta, \xi) = -F(\xi, \eta)$$

を満足するとき F は**反対称**といわれる．これをその係数 a_{ik} で示すと，$a_{ki} = -a_{ik}$ となる．もし ξ, η がともに同じ一次変換をこうむるときは，この反対称の性質はそのまま保持される．一般に反対称，対称，あるいは（対称で）縮退していないというような特性は，共変または反変 2 階テンソルの座標系に無関係な性質である．

二つの変数列 ξ, η が互いに反傾に変換されるとき，単位形式 $\sum_i \xi^i \eta_i$ はその形をかえない，すなわち $\sum_i \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i$ となる．このことから 2 階混合テンソル（すなわち 1 重の共変，1 重の反変性をもつテンソル）に属するものとして**単位テンソル**が存在することがわかる．これは任意の座標系で，常にその成分が

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

である.

3) ユークリッド空間の計量は任意の二つの変位ベクトル

$$\boldsymbol{x}=\sum_i \xi^i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{y}=\sum_i \eta^i \boldsymbol{e}_i$$

に対して，これらのスカラー積として，座標系に無関係なひとつの数

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\eta^k, \qquad g_{ik}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k$$

をあたえる．上の左側の式の右辺であたえられた双一次形式は座標変換に応じて，2 階共変テンソルとしてふるまう．このテンソルは**計量基本テンソル**と呼ばれる．これにより計量，つまり距離の定義は完全にきめられる．これは対称で，縮退していない．

4) 任意の変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'$ に写像するとき，もし $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$ に，また $\lambda\boldsymbol{x}$ は $\lambda\boldsymbol{x}'$ に移される場合，このような写像を**線形ベクトル写像**とよぶ．このような写像を簡単に呼べるように，**マトリックス**と名づける．座標系の基礎ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ がこの写像により

$$\boldsymbol{e}'_i=\sum_k a_i^k \boldsymbol{e}_k$$

に移されるとすれば，任意の変位ベクトル $\boldsymbol{x}=\sum_i \xi^i \boldsymbol{e}_i$ は

$$\boldsymbol{x}'=\sum_i \xi^i \boldsymbol{e}'_i=\sum_{ik} \xi^i a_i^k\cdot\boldsymbol{e}_k \tag{24}$$

に移される．そこでこのマトリックスは，いま用いている

座標系を基準にしたとき，双一次形式

$$\sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k$$

で規定される．(24) からは，二つの座標系（以前から使っている記号を使うと）に対して

$$\sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\boldsymbol{e}}_k = \sum_{ik} a_i^k \xi^i \boldsymbol{e}_k (= \boldsymbol{x}')$$

という関係が導かれる．但し $\bar{\xi}$ と ξ の間には

$$\sum_i \bar{\xi}^i \bar{\boldsymbol{e}}_i = \sum_i \xi^i \boldsymbol{e}_i (= \boldsymbol{x})$$

という関係がある．したがって η_i, ξ^i が基礎ベクトルの変換に対してそれぞれ共傾，ならびに反傾に変換されるとすれば（変数 ξ, η の変換則についてのこのような注意は自明である．したがって今後は同様の場合には一切省略する），

$$\sum_{ik} \bar{a}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k = \sum_{ik} a_i^k \xi^i \eta_k$$

がなりたつ．このようにしてマトリックスはひとつの 2 階混合テンソルとして表わされる．特にすべての変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ を自分自身に移す“恒等写像”は単位テンソルに対応する．

前に述べた力や計量の例でもわかるように，テンソルの応用に際しては，幾何学的あるいは物理学的量については，前もって尺度の単位を選定したのちにはじめて，テンソルを用いてそれらの量の表現が可能となる場合がしばしば起る．単位の選定は個々に，ただ“これこれの量を単位にす

る”と指示すれば十分である．もし単位を変更するときは，新旧両単位の比を示す数値を，共通の因数として以前に求めたテンソルにかければよい．

テンソルの概念について今まで述べてきた定義はつぎのような判別法と同等である：**座標系に依存する数個の変数列の一次形式は，その変数列のうち，座標系の基礎ベクトルの変換に反傾に変換される変数列を任意の反変ベクトルの成分でおきかえ，また共傾に変換される変数列を任意の共変ベクトルの成分でおきかえることによって，この一次形式が座標系の選びかたに無関係な一定の値をもつようになるときは，この多変数列の一次形式は，実はひとつのテンソルである．**

ここでアフィン幾何学から計量幾何学に移れば，この節のはじめに述べたことからもわかるように，共変と反変のちがいは単なる表現のちがいになる．一方，アフィン幾何学ではこのちがいはテンソル自身の相違を示すものである．したがって計量幾何学では**共変テンソル，混合テンソル，反変テンソル**のそれぞれについて論ずるかわりに，ただひとつのテンソルの**共変成分，混合成分**あるいは**反変成分**について論ずればよい．したがって種々の共変性をもったテンソルの間の結び付きは上述の判別法を使えば以下のように簡単に公式化される：いまひとつのテンソルに含まれる反傾に変換される変数を任意のひとつの変位ベクトルの反変成分とみなし，また共傾に変換される変数を他のひとつの変位ベクトルの共変成分と解釈するならば，このテンソ

ルは数個の任意の変位ベクトルの一次形式となり，しかもその値は座標系に無関係となる：そこでいまこの一次形式の変数を任意に，あるいはその共変成分で，または反変成分で書きかえれば，同じテンソルを種々の異なる形に表わすことができる．すなわちこの一次形式の中にある変数 ξ^i を（22）によって ξ_i に書きかえれば，まったく代数的にテンソルの共変的添字は反変的添字にかわる．このような操作は反傾的な変数を共傾変数におきかえることに相当するから，この操作は座標系の選びかたに無関係な，不変の性質をもつものである．この逆の操作も，逆変換式（22′）を用いれば可能である．テンソルの成分自身についていえば，（g_{ik} の対称性のために）反変から共変への移行（これは上の添字を下におろすことに相当する）は，a^i を

$$a_i = \sum_j g_{ij} a^j$$

によって a_i にかえればよい．a^i がもっと多数の添字をもっているときでもまったく同様である．下の添字を引き上げることも上の逆の式を使えば可能である．

この規則をいま計量基本テンソル自身に応用すれば，

$$\sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k = \sum_i \xi^i \eta_i = \sum_k \xi_k \eta^k = \sum_{ik} g^{ik} \xi_i \eta_k$$

となる．したがって計量テンソルの混合成分は数 δ^i_k であり，またその反変成分は g^{ik} である．後者は（22）を ξ^k について解く場合に係数 g_{ik} の逆として登場したものである．g_{ik} が i，k について対称なために，$g^{ki} = g^{ik}$ である．

ここで記号についてつぎのような申し合わせをする．すなわちひとつの同じテンソルの共変，混合，あるいは反変成分を表わすには同じ文字を使い，ただ添字を上または下につけることによって，つまり添字の位置で上述の3種の成分を区別する．たとえばつぎの2階テンソルの例が示す通りである；

$$\sum_{ik} a_{ik}\xi^i\eta^k = \sum_{ik} a^i{}_k\xi_i\eta^k = \sum_{ik} a_i{}^k\xi^i\eta_k = \sum_{ik} a^{ik}\xi_i\eta_k$$

(ここで上ならびに下に添字のついた ξ の間の関係は (22) であたえられる．η についても同様)．

距離空間では上に述べた通り，共変ならびに反変ベクトルの間のちがいはなくなる．したがって，われわれの本来の解釈では力はひとつの共変ベクトルで表わされるべきものであったが，ここでは，それをひとつの反変ベクトル，つまり変位ベクトルによって表現することもできる．というのは，いま力を一次形式 $\sum_i p_i\xi^i$ によって，つまり反傾変数 ξ^i を使って表示したとすれば，(22′) によりこの ξ^i を ξ_i にかきかえて $\sum_i p^i\xi_i$ とすることもできる．したがって

$$\sum_i p^i\xi_i = \sum_{ik} g_{ik}p^i\xi^k = \sum_{ik} g_{ik}p^k\xi^i = \sum_i p_i\xi^i$$

がなりたつ．この式を見ればわかるように，力を示す反変ベクトル $\boldsymbol{p}$ は，この $\boldsymbol{p}$ と力の作用下での移動量を示す変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ のスカラー積が，この変位のさいに力のなす仕事に等しいという要請から決定される．

直交座標系では，基本テンソルの成分は

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

である．そこで反変と共変を結ぶ関係式（22）は簡単に $\xi_i = \xi^i$ となる．そこで直交座標系を基準にとることにすれば，単にテンソルのちがいが消失するばかりでなく，その成分についても共変，反変の区別が不要となる．しかしここでつぎのことを注意しておかなければならない．すなわち基本テンソル g_{ik} に関して今まで述べてきたいろいろの概念は，g_{ik} が対称で，縮退していないという仮定に立っている．一方，直交座標を設けることができるためにはさらに，g_{ik} から作られる二次形式が正定符号であることが必要な前提である．このことはどうでもよいとするわけにはいかない問題である．実際，相対性理論では 3 個の空間座標に，第 4 番目の座標として時間座標がつけ加わる．そしてこの 4 次元多様体でなりたつ距離の定義は正定符号にはならないひとつの二次形式によりあたえられる（第 III 章）．そこでこのような多様体では，われわれが実数の座標だけを使用するかぎり，直交座標系を設けることはできない．それにもかかわらず，われわれが今まで展開してきた種々の概念は（次元数 n を 4 に制限して）相対性理論において応用される．さらに，§4 のおわりでも述べたように，計算の代数的な簡単さを考慮すれば，直交座標系だけを使用するという立場には賛成できない．最後に，また特に，これからユークリッド幾何学をのりこえて理論を拡張するためには，アフィン幾何学の立場を，計量とは無関係に，完

全に役にたつように展開することこそ非常に重要なことである．

幾何学的な，また物理学的な量はすべて，スカラーか，ベクトルか，あるいはテンソルのいずれかである．このことこそ，これらの量を包含している空間の数学的性質を物語るものである．これによって規定された空間の数学的対称性は，幾何学についてのみなりたつというものではなく，むしろそれは物理学においてはじめてその効力を発揮するものである．自然現象はひとつの距離空間の中に起こるから，この現象を支配している自然法則を表現するにはテンソル算はきわめて自然な数学的道具である．

§6 テンソル代数．例

テンソルの和 一次式，双一次形式，三・一次形式，……に数をかけたもの，また一次式どうし，双一次形式どうし，……の和はいずれも，もとと同じ種類の数式である．したがってベクトルやテンソルに数（またはスカラー）をかけたもの，また数個の同種のベクトルどうし，あるいはテンソルどうしを加えたものは，それぞれもとの量と同種類の量になることがわかる．このような演算は各量の成分に数をかけること，またそれぞれの成分どうしの和をとることに相当する．任意の階数のテンソルの仲間には，必ずひとつの特別なもの，0がある．これはそのすべての成分が0という特別なテンソルである．これを，それと同じ階

数の他の任意のテンソルに加えても，後者はもとのままである．——ひとつの物理系はある種のスカラーやテンソルの値をあたえることによって，その状態が規定される；また自然法則は一般にはこれらの量から数学的演算により作られた不変（すなわち座標系の選びかたに無関係）な関係式；(テンソル)＝0 によりあらわされる．

例　質点の運動を解析的な方法で表現するには，運動する質点の位置，すなわちその座標 x^i を時間 t の関数としてあたえればよい．これの時間についての微分，すなわち $\dfrac{dx^i}{dt}$ は“速度”というベクトルの反変成分 u^i である．運動する質点の質量 m（これはひとつのスカラーで，質点の慣性を示す）を u^i にかければ，“運動量”となる．すべての質点（質点の力学では物体は多数の質点の塊りと考えられている）のそれぞれの運動量を加えることによって質点系全体，あるいは剛体の全運動量を得る．もし質量が連続的にひろがっている場合，つまり連続物体のときは，和を積分にかえればよい．さて運動の基本法則はつぎのように書き表わされる；質点の運動量の反変成分を G^i，またこれに働く力の反変成分を p^i とおけば

$$\frac{dG^i}{dt} = p^i \ ; \quad G^i = mu^i. \tag{25}$$

われわれの本来の解釈では，力はひとつの共変ベクトルであったから，ここに書いた法則はただ距離空間でのみなりたち，アフィン空間では意味をなさない．(25) と同じ関係は剛体の場合にもなりたつ．その時は G^i は剛体の全運

動量であり，p^i はこれに働く力の総和である．

テンソルの積 ξ および η についての一次式をそれぞれ $\sum_i a_i\xi^i$，および $\sum_i b_i\eta^i$ とする．これらをかけ合わせると ξ，η についての双一次形式

$$\sum_{ik} a_i b_k \xi^i \eta^k$$

ができる．そこで二つのベクトル a，b から，2 階のテンソル c が生まれる．その成分は

$$a_i b_k = c_{ik} \tag{26}$$

である．(26) はベクトル a，b とテンソル c の間の関係を示す．つまり新しい座標系に移った際にも，新座標系を基準としたこれらの量の新成分（上に $^-$ をつけて区別する）の間には (26) と同じ関係

$$\bar{a}_i \bar{b}_k = \bar{c}_{ik}$$

がなりたつ．まったく同様に 1 階のテンソルと，2 階のテンソル（もっと一般には任意の階数のテンソルと，他の階数のテンソル）の積も定義できる：すなわち

$$\sum_i a_i\xi^i \quad と \quad \sum b_i^k \eta^i \zeta_k$$

をかけると

$$\sum_{ikl} a_i b_k^l \xi^i \eta^k \zeta_l$$

となる．ここで ξ，η，ζ はその添字が上か下かに応じて反傾または共傾に変換される変数列を示す．上の結果から，1

階と2階のテンソルの積は3階のテンソル c をあたえることがわかる．その成分は

$$a_i b^l_k = c^l_{ik}.$$

上の例からわかるように，二つのテンソルの積の成分を求めるには，一方のテンソルの任意の成分と，もうひとつのテンソルの任意の成分の積を作ればよい．その際，**もとの両成分の添字は互いに完全に独立にたもたれなければならない**．なお上にあたえられた3階テンソルの添字 l が共変成分であるものは

$$c_{ikl} = a_i b_{kl}$$

であたえられる．このようにテンソルの積を作るとき，両側の添字を同時に上下させることは容易にできる．

反対称および対称テンソルの例　2個のベクトルの反変成分をそれぞれ a^i, b^i とする．これらの積からつぎのような反対称2階テンソル c を作ることができる．すなわちその反変成分は

$$c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$$

であたえられる．普通のベクトル算では，これは2個のベクトル a, b の“ベクトル積”に相当するものである．3次元空間の場合には，ひとつのきまったネジの向きをきめると，ここに定義されたテンソルとひとつのベクトルの間に簡単な1対1の対応をつけることができる．つまりそれは反対称2階テンソルをベクトルで表わすことになる．(4次元空間ではこのような対応づけはできない．というのは反

対称2階テンソルは6個の独立な成分をもち，他方，ベクトルは4個の成分をもつから．もっと次元数の高い空間についてもこのような対応づけは不可能である．3次元のときにかぎりこのような対応づけは以下に述べるように遂行できる)．それにはまず直交座標系を設ける．ベクトル a, b のほかに任意の変位ベクトル ξ を考える．これら3個のベクトルから行列式

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{vmatrix} = c^{23}\xi^1 + c^{31}\xi^2 + c^{12}\xi^3$$

を作る．いまひとつの直交座標系から他の直交座標系に座標変換をすれば，新成分から作られる上と同様の行列式は，旧成分でかいた上の行列式に変換係数の作る行列式をかけたものに等しい．しかし直交変換のときは，変換係数の作る行列式は $=\pm 1$ である．いま変換を“本義”直交変換（つまり行列式 $=+1$ ）にかぎれば，上述の a, b, ξ から作られた行列式，つまり ξ の一次式の値は不変である．そこで公式

$$c^{23} = c_1^*, \quad c^{31} = c_2^*, \quad c^{12} = c_3^*$$

によって反対称2階テンソル c にひとつのベクトル c^* を対応させる．この対応法は本義直交変換に対して不変である．ベクトル c^* はもとのベクトル a, b のいずれにも直交し，その大きさは（簡単な解析幾何学の公式により）a, b により張られる平行四辺形の面積に等しい．——反対称2

階テンソルをひとつのベクトルでおきかえることは，3 次元空間におけるベクトル算では記号の経済という観点から妥当なものと考えられる．しかしこのような操作は，多くの点で，事柄の本質を覆いかくしてしまう．またこれは電気力学における悪名の高い“泳ぎの法則”（Schwimmregel）の原因になっている．この法則は電磁現象のおきている空間には特別なネジの方向が規定されることを教えるものであるが，実際はそれはまちがいで，磁場が反対称テンソルであるにもかかわらず，それをベクトルで表わしたための必然の結果にすぎない．もし空間の次元数をもっと大きくすれば，このような誤りは決しておこらない．

力学では二つのベクトルの反対称なテンソル積の例としては，1）一点 O のまわりの**角運動量**がある．いま点 P にひとつの質点があり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分を ξ^1，ξ^2，ξ^3 とする．また u^i はこの瞬間におけるこの質点の速度の反変成分，さらに m をその質量とすれば角運動量は

$$L^{ik}=m(u^i\xi^k-u^k\xi^i)$$

であたえられる．ひとつの剛体の O 点のまわりの角運動量は，この剛体を構成している個々の質点の角運動量の総和であたえられる．2）第二の例は**力の能率**である．上述のように点 P にある質点に力 p^i（反変成分を示す）が働いているときは，力の能率は

$$q^{ik}=p^i\xi^k-p^k\xi^i$$

で定義される．また剛体のときはそれに含まれる各質点についてこれの総和をとればよい．そこで（25）により，ひ

とつの質点に対して，法則

$$\frac{dL^{ik}}{dt}=q^{ik} \tag{27}$$

がなりたつ．剛体の場合には固定点Oのまわりの剛体の回転に対してのみ，これが成立する．反対称テンソルの第三の例として固定点Oのまわりの剛体の回転速度をあげよう．Oのまわりの回転によって一般に点PがP′に移ったとすれば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ は（ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ も同様に）ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ からの一次写像により作られる．いま $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分を ξ^i，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ のそれを $\delta\xi^i$，また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ への一次写像マトリックスの成分を v^i_k とすれば

$$\delta\xi^i=\sum_k v^i_k\xi^k \tag{28}$$

がなりたつ．ここでわれわれは無限小回転を考えることにする．これは無限小のマトリックスであらわされ，なおつぎの性質をもつ．すなわち，任意の ξ^i に対して恒等的に

$$\delta(\sum_i \xi_i\xi^i)=\delta(\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k)=0$$

がなりたつ．その結果

$$\sum_i \xi_i\delta\xi^i=0$$

となる．これに（28）を代入すれば

$$\sum_{ik} v^i_k\xi^k\xi_i=\sum_{ik} v_{ik}\xi^i\xi^k=0.$$

これが ξ に対して恒等的になりたたねばならないから

$$v_{ik}+v_{ki}=0$$

という結果が導かれる．したがって共変成分 v_{ik} をもつこのテンソルは，反対称である．

剛体の運動では，無限小の時間 δt の間に剛体は無限小回転をこうむる．そこで上に求めた無限小回転のテンソル v を δt で割って（$\delta t \to 0$ として）"角速度" という反対称テンソルを得る．しかしこれを再び同じ文字 v で示すことにする．いま点 P の速度ベクトルの反変ならびに共変成分を，それぞれ u^i，および u_i で示せば，(28) は

$$u_i=\sum_k v_{ik}\xi^k \tag{29}$$

となる．これは剛体の運動学における基本公式である．回転に対して "瞬間的回転軸" が存在するということは (29) の $u=0$ とした方程式

$$\sum_k v_{ik}\xi^k=0$$

から導かれる．というのは $n=3$ の場合には反対称係数 v_{ik} の行列式が 0 となるから上の方程式は，$\xi^1=\xi^2=\xi^3=0$ 以外の解をもつ．——なお角速度もひとつのベクトルで表わされる場合が多い．

最後に対称 2 階テンソルの簡単な例として剛体の回転の際に登場する**慣性能率**についてのべよう．いま点 P に質量 m の質点があるとする．固定点 O から P にいたるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分を前と同じく ξ^i とするとき，$T^{ik}=m\xi^i\xi^k$ は対称 2 階テンソルの反変成分であり，これをこの質点の

固定点Oのまわりの“回転慣性”（Rotationsträgheit）という．質点系または剛体の回転慣性は，これらを構成している各質点のもつ回転慣性の総和であたえられる．ここにあたえた定義は通常のそれとは異なるが，これは正しい定義である．なんとなれば角速度をベクトルにたよらず正確にひとつの反対称テンソルで表わすならば，ただちにわかる．Oのまわりの回転に対してテンソル T^{ik} は，並進運動のさいのスカラー量の m と同じ役目をはたすことがわかる．

縮約（Verjüngung）　c_i^k を2階テンソルの混合成分とすれば $\sum_i c_i^i$ はひとつの不変量である．つまり $\bar{c}_i^k$ を同じテンソルの新しい座標系からみたときの混合成分とすれば

$$\sum_i c_i^i = \sum_i \bar{c}_i^i.$$

証明：いま双一次形式

$$\sum_{ik} c_i^k \xi^i \eta_k$$

の変数列 ξ^i，η^k が互いに反傾な変換

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k^i \bar{\xi}^k, \qquad \eta_i = \sum_k \breve{\alpha}_i^k \bar{\eta}_k$$

をこうむると上の双一次形式は

$$\sum \bar{c}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k$$

となる．そこで $\bar{c}$ と c の関係が求められる．それを使うと

$$\bar{c}_r^r = \sum_{ik} c_i^k \alpha_r^i \breve{\alpha}_k^r,$$

$$\sum_r \bar{c}^{\,r}_{\,r} = \sum_{ik}(c^k_i \sum_r \alpha^i_r \breve{\alpha}^r_k),$$

(20′) を使うと

$$= \sum c^{\,i}_{\,i}. \qquad \text{（証明おわり）}$$

マトリックスの成分 c^k_i から作られた不変量 $\sum_i c^{\,i}_{\,i}$ をマトリックスの**対角和**（Spur）という．

上の例からわれわれは，テンソルの**縮約**とよばれるひとつの一般的な演算を導くことができる．これはテンソルの積につぐ，第二の重要な演算である．いまあるテンソルの混合成分の任意のひとつの上側添字と，任意のひとつの下側添字とを等しくおいてそれについて 1 から n まで和をとることによって，もとのテンソルより 2 階だけ階数の低いひとつの新しいテンソルを得る．この操作を縮約という．例えば 5 階テンソルの成分 a^{lm}_{hik} から

$$\sum_r a^{lr}_{hir} = c^{\,l}_{\,hi} \tag{30}$$

で定義された成分をもつ 3 階テンソルが導かれる．(30) で示されたテンソル成分 a と c の間の関係は不変である．これを証明するには他の座標系に移ったとき，a が $\bar{a}$ になるとして，(30) にならって $\bar{c}$ を

$$\sum_r \bar{a}^{\,lr}_{\,hir} = \bar{c}^{\,l}_{\,hi} \tag{31}$$

によって定義する．そこで (30)，(31) で定義された c，$\bar{c}$ が座標変換に対して 3 階のテンソルとして互いに結ばれることを示せばよい．それには，任意の二つの反変ベクトル

ξ^i，η^i とひとつの共変ベクトル ζ_i を使って，まず

$$\sum a_{hik}^{lm}\xi^h\eta^i\zeta_l = f_k^m$$

とおく．これが2階混合テンソルであることは明らかである．したがって既に証明したことにより

$$\sum_r f_r^r = \sum_r \bar{f}_r^r.$$

これに（30）と（31）の定義を使えば

$$\sum_{hil} c_{hi}^l \xi^h\eta^i\zeta_l = \sum_{hil} \bar{c}_{hi}^l \bar{\xi}^h\bar{\eta}^i\bar{\zeta}_l.$$

したがってもとの座標系での成分が c_{hi}^l である3階テンソルの新しい座標系からみた成分が $\bar{c}_{hi}^l$ であることが証明された．

われわれはこの縮約という演算には，既に今まで何度も出会っている．一般に添字について1から n まで和をとる場合は，いつでも和をとるべき添字のひとつは必ず上側に，もうひとつは下側にある．この和を計算することがまさに縮約である．例えば（29）では，v_{ik} に ξ^i をかけることにより3階のテンソル $v_{ik}\xi^l$ がまずできる．そこで k と l を等しくおいて，k について和をとれば，1階のテンソル u_i ができる．またひとつのマトリックス A が，任意の変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'=A(\boldsymbol{x})$ に移したとする．さらに第二のマトリックス B が $\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{x}''=B(\boldsymbol{x}')$ に移すとすれば，これら2個のマトリックスから合成されたひとつのマトリックス BA ができる，これは $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}''=BA(\boldsymbol{x})$ に移す．A の成分を a_i^k，B のそれを b_i^k とすれば，BA のそれは

$$c_i^k = \sum_r b_i^r a_r^k$$

である．ここでもまた積とそれにつづいて縮約が行なわれている．縮約は上下一組の添字をそろえるばかりでなく，同時に何組かをそろえて，それぞれについて独立に和をとってもよい．例えば 1, 2, 3, …階のテンソルの成分をそれぞれ $a_i, a_{ik}, a_{ikl}, \cdots$ とすれば，これらのそれぞれから不変量を作ることができる：

$$\sum_i a_i a^i, \quad \sum_{ik} a_{ik} a^{ik}, \quad \sum_{ikl} a_{ikl} a^{ikl}, \quad \cdots.$$

もし，われわれがここに仮定しているように，計量基本テンソルから作られる二次形式が正定符号ならば，上にならべた不変量はすべて正の値をもつ．なんとなれば，仮定により直交座標系を設けることができるから，それを基準にとれば，上の不変量は成分の 2 乗の和になるからである．このとき，それぞれの量の平方根を，ベクトルの場合にまねて，テンソルの**大きさ**（Betrag）と呼ぶ．

さてここで，また今後のためにひとつ申し合わせをしよう．いま添字をもった数式のある項（それはひとつのテンソルの成分を示す）に同じ添字が上下二個所に出てきたときは，この添字について和の記号がその項の左側に書いてなくとも，必ず 1 から n まで和をとるものと約束する．

テンソルの和，積および縮約という演算はただアフィン幾何学の前提だけで可能である．これは計量基本テンソルの存在を必要としない．計量テンソルは，共変成分を反変

成分に，またこの逆の変更のためにのみ必要であるにすぎない．

コマの運動のオイラー方程式　テンソル計算の練習のために，外力が働いていない場合，ひとつの固定点 O を中心とする剛体の回転運動に対するオイラーの方程式をみちびいてみよう．O を原点とし，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を基礎ベクトルとするひとつの座標系を設ける．さらに“ベクトル積” $[\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k] = \boldsymbol{e}_{ik}$ $(= -\boldsymbol{e}_{ki})$ を作る．これは $i \neq k$ のときは 2 階反対称反変テンソルで，その成分は $\xi^{ik} = +1$, $\xi^{ki} = -1$，その他の成分はすべて 0 とする．また $i = k$ のときはそのすべての成分が 0 とする．この剛体の角運動量はテンソル

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2} L^{ik} \boldsymbol{e}_{ik}$$

であたえられる．いま剛体を構成するすべての質点にわたっての和を $\sum\limits_{m}$ で示し，

$$H^{ik} = \sum_{m} m u^i \xi^k$$

とすれば，上の L^{ik} は

$$L^{ik} = H^{ik} - H^{ki}$$

であらわされる．したがって

$$\boldsymbol{L} = H^{ik} \boldsymbol{e}_{ik}$$

とも書きあらわされる．さて回転についての力学の法則によれば，外力がないから，この角運動量 $\boldsymbol{L}$ は時間的に一定

である．すなわち空間に固定した座標系 $\boldsymbol{e}_i$ に対しては，成分 L^{ik} は時間がたっても，その値を変えない．しかし，いま空間に固定された $\boldsymbol{e}_i$ のかわりに回転する剛体自身に固定された座標系 $\boldsymbol{e}_i$ を用いれば，力学の法則から

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{dH^{ik}}{dt}\boldsymbol{e}_{ik}+H^{ik}\frac{d\boldsymbol{e}_{ik}}{dt}=0 \tag{32}$$

となる．$\boldsymbol{e}_{ik}$ の時間微分は今度は 0 にならない．これは

$$\frac{d\boldsymbol{e}_{ik}}{dt}=\left[\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt},\boldsymbol{e}_k\right]+\left[\boldsymbol{e}_i,\frac{d\boldsymbol{e}_k}{dt}\right]$$

である．いま

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=v_i^r\boldsymbol{e}_r$$

とおけば，v_i^r は回転速度を示す混合テンソルの成分である．この共変成分 $g_{kr}v_i^r=v_{ki}$ は反対称である．そこで

$$\begin{aligned}H^{ik}\frac{d\boldsymbol{e}_{ik}}{dt}&=H^{rk}\left[\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt},\boldsymbol{e}_k\right]+H^{ir}\left[\boldsymbol{e}_i,\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}\right]\\&=\{H^{rk}v_r^i+H^{ir}v_r^k\}\boldsymbol{e}_{ik}.\end{aligned} \tag{33}$$

点 P に在る質点の位置を示すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{x}=\xi^i\boldsymbol{e}_i$ は剛体に固定された座標系では，時間的に一定な値の成分 ξ^i をもつ．そこで P の速度 $\boldsymbol{u}$ は

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\xi^r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}=\xi^r v_r^i\boldsymbol{e}_i,$$

すなわち $u^i=v_r^i\xi^r$ である．したがって

$$H^{ik}=v_r^i\sum_m m\xi^r\xi^k=v_r^iT^{rk}. \tag{34}$$

ここで T^{rk} は慣性テンソル（Trägheitstensor）の（剛体に固定された座標系からみれば時間的に一定な値の）成分を示す．これを使うと（33）の第二項は 0 となる．なんとなれば

$$H^{is}v_s^k = v_r^i v_s^k T^{rs}$$

は i, k について対称（$T^{rs} = T^{sr}$ だから）となるから．そこで結局（32）は

$$\left\{\frac{dv_r^i}{dt}T^{rk} + (vv)_r^i T^{rk}\right\} e_{ik} = 0 \qquad (35)$$

となる．ここで (vv) は

$$(vv)_k^i = v_r^i \cdot v_k^r$$

を意味する．この共変成分は

$$(vv)_{ik} = v_{is} \cdot v_k^s = -v_{si} \cdot v_k^s = -g_{sr} \cdot v_i^r v_k^s$$

であるから，i，k について対称である．（35）を成分でかくと

$$\left\{\frac{dv_r^i}{dt} + (vv)_r^i\right\} T^{rk} - \left\{\frac{dv_r^k}{dt} + (vv)_r^k\right\} T^{ri} = 0.$$

さて"慣性主軸"（Hauptträgheitsachse）を基礎ベクトルとする直交座標系を設けることはもちろん可能である．その場合には

$$g_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \qquad \text{また} \qquad T^{ik} = 0 \quad (i \neq k)$$

である．また T^{11} を T_1，T^{22} を T_2，T^{33} を T_3 とかくことにする．さらに添字の上下の区別はこの場合には不要となるから，この座標系では，運動の方程式は

$$(T_i+T_k)\frac{dv_{ik}}{dt}=(T_i-T_k)(vv)_{ik}$$

という簡単なものになる．これが未知量である角速度の成分 v_{ik} に対する微分方程式である．これの解はよく知られているように時間の楕円関数となる．なおここに登場した主慣性能率（Hauptträgheitsmoment）T_i は，普通使われる定義にもとづく T_i^* と

$$T_1^*=T_2+T_3,\quad T_2^*=T_3+T_1,\quad T_3^*=T_1+T_2$$

で結ばれる．

回転の問題についてここに与えられた取り扱いは，一語一語，3 次元空間から多次元空間の言葉へ翻訳することができる．そのような一般化は実用的にはまったく無駄なことである．しかし特定の次元数への制限をとりはずすこと，すなわち自然法則にとって 次元数＝3 はひとつの偶然にすぎないということが明らかであるような形式で法則を公式化することは，自然法則に対するわれわれの数学的記述が完全な域にまで達成されていることを示すことになる．

テンソル算を用いることは――その添字についてのわずらわしさ（これはいずれは克服されねばならない）を無視しても――たしかにある種の概念的困難をもっている．しかしその計算法は形式的にみて，ことのほか簡単である．たとえば初等的なベクトル算の道具だてよりはるかに簡単である．テンソル算の主要な演算といえば結局は，テンソルの積と縮約の二つである：すなわちまず二つのテンソルの成分をならべて書く．ただしその添字はどれもすべて互

いに異なる文字をつける．つぎにどれか上側のひとつの添字と，下側の任意のひとつの添字を同じ文字にそろえ，最後にその添字について1からnまで和をとる．ところでテンソルを不変な形に書きあらわすこと，つまり座標系のとりかたに依存するテンソルの成分を使わず，ただテンソルそのものだけでテンソル算を書きあらわそうという試みは，これまでしばしばあった．これは3次元空間におけるベクトル算の成分によらない表現と似たようなものを作ろうとする試みである．しかし，著しく発展したテンソル算の大きな体系にとっては，このような試みはまったく不都合であることがわかった．もしわれわれが絶対に成分にたよらないようにしようとすれば，非常に多数の名称や記号，また多くの計算の規則を導入しなければならない．その結果は意図に反して莫大な損失をせおいこむことになる．われわれはこのようなでたらめな形式主義の跳梁に対し強く抗議しなければならない．実際このような形式主義は今日もともと形式的扱いを得意とする技巧派の人々をも悩ましはじめている．

§ 7　テンソルの対称性

前節の例でも明らかなように，2階対称テンソルと反対称テンソルはまったく異なる種類の量である．したがってある量が何階のテンソルであるかを指示するだけでは，その量の特性は一般的にいって完全には規定されない．われ

われはさらにそのテンソルの**対称性**についての指示を付け加えなければならない．

多数の変数列のいずれについても一次式となっている数式（これを多・一次形式と呼ぼう）の，任意の 2 組の変数列のいれかえをしても，その多・一次形式の値が不変なとき，それは**対称**であるという．またもしいれかえによって，もとの値の符号を反対にしたものになるときは，この多・一次形式は**反対称**であるという．対称多・一次形式は，その変数列をどんなにいれかえても，その値は不変である．これに対して反対称多・一次形式は，その変数列に偶置換を行なっても，その値はかわらない．ただ奇置換を行なったときにのみ，その値は逆符号のものに変わる．たとえば対称三・一次形式の係数 a_{ikl} はつぎの条件を満足する：

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = a_{kil} = a_{lki} = a_{ilk}.$$

これに対して，反対称三・一次形式ではその係数は，3 個の添字がすべて互いに異なるときだけ $\neq 0$ である．それはつぎの条件をみたす：

$$a_{ikl} = a_{kli} = a_{lik} = -a_{kil} = -a_{lki} = -a_{ilk}.$$

そこで変数列が n 個の変数からなる場合（すなわち，各添字が $1, 2, \cdots, n$ までの値をとる場合）には，n 組以上の多数の変数列に依存する反対称多・一次形式はあり得ない．対称双一次形式に含まれる 2 組の変数列を同じものにすることによりひとつの二次形式が作られたように，ひとつの対称三・一次形式からはその 3 組の変数列をすべて同じものにおきかえることにより係数 a_{ikl} をもったひとつの変数

列の三次形式が生まれる．ここでひとつの反対称三・一次形式

$$F=\sum_{ikl}a_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l$$

を考えよう．この変数列 ξ，η，ζ に 3! 通りの置換をほどこし，その置換が，偶置換か奇置換かに応じて，置換をほどこした結果に ＋ または － をつける．このようにすれば，もとと同じ値の 6 個の式が得られる．これらをすべて加えたものを 3! で割ると，それはつぎの形にかきあらわされる：

$$F=\frac{1}{3!}\sum a_{ikl}\begin{vmatrix}\xi^i & \xi^k & \xi^l\\ \eta^i & \eta^k & \eta^l\\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l\end{vmatrix}. \qquad (36)$$

多・一次形式が対称，または反対称であるという性質は，それに含まれている変数列がすべて同じ一次変換をうけるときは，変換に際して不変のまま保たれる．それゆえ，対称または反対称共変（または反変）テンソルという言葉は座標変換に対して不変な意味をもつ．しかし混合テンソルの場合にはこのような対称性について語ることは無意味である．対称テンソルについてはこの上さらに特に注意すべきことはない．そこでこれから反対称共変テンソルについて，少し長々と述べることにする．というのは，それはまったく特別な意味をもつものであるから．

ひとつの変位の成分 ξ^i をあたえれば，それはひとつの線分の方向，向き，ならびにその大きさを決定する．ξ^i，η^i

は任意の二つの互いに一次独立な変位とする．これらの変位がともに任意の 1 点 O から突き出しているとすれば，これらはひとつの平面を張る．そこで

$$\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i = \xi^{ik}$$

という量を作る．ξ^i の比が，この変位を示す線分の方向を決定したように，上にあたえた ξ^{ik} の比は，平面の方向を決定する．二つの変位 ξ^i，η^i が一次独立でないとき，したがってこれらが 2 次元多様体を張らないとき，またそのときにかぎり ξ^{ik} はすべて 0 となる．二つの一次独立な変位 ξ，η はそれらにより張られる平面の上で，ひとつの回転の向きを規定する．その向きとは，ξ の方向をこの平面上で回転させて η の上に重ねる場合の回転の向きである．ただし回転角は $<180°$ に制限する．この場合，向きだけでなく，ξ，η によってきめられる平行四辺形の面積をこのテンソルの大きさときめる．1 点 O から突きでている二つの変位 ξ，η および他の任意の 1 点 O_* からでている ξ_*，η_* はそれぞれ別の ξ^{ik}，η_*^{ik} をあたえる．これらについて

$$\xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i = \xi_*^i\eta_*^k - \xi_*^k\eta_*^i$$

がすべての成分に対してなりたつ場合にかぎり ξ^{ik}，ξ_*^{ik} によりあたえられる平面の方向，むき，および大きさは一致する．したがって ξ^i がそれの示す直線の方向，向き，ならびにこの変位の大きさを決定したように，ξ^{ik} は平面の方向と一緒にその向き，大きさをも決定する．それゆえにこれら両種の量は，この意味で完全に似ている．

さてこれらの量をいい表わすために，前者を **1 次元の空**

間要素，後者を**2**次元の空間要素と呼ぶことにしよう．1次元空間要素の大きさの2乗は

$$\xi_i \xi^i = g_{ik} \xi^i \xi^k = Q(\xi)$$

であたえられる．また2次元要素も解析幾何学の公式にしたがって，その大きさの2乗は

$$\frac{1}{2} \xi^{ik} \xi_{ik}$$

であたえられる．これはつぎのように書きかえることができる：

$$\begin{aligned} \xi_i \eta_k (\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i) &= (\xi_i \xi^i) \cdot (\eta_k \eta^k) - (\xi_i \eta^i) \cdot (\eta_k \xi^k) \\ &= Q(\xi) \cdot Q(\eta) - \{Q(\xi, \eta)\}^2. \end{aligned}$$

今まで述べてきた例とまったく同様にして，三つの互いに一次独立な変位 ξ^i，η^i，ζ^i から，行列式

$$\xi^{ikl} = \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{vmatrix}$$

を作れば，これは**3**次元空間要素の成分を示す．その大きさは，不変量

$$\sqrt{\frac{1}{3!} \xi^{ikl} \xi_{ikl}}$$

であたえられる．3次元空間ではこの不変量はつぎのものに等しい：

$$= \xi_{123} \xi^{123} = g_{1i} g_{2k} g_{3l} \xi^{ikl} \xi^{123}.$$

ところで $\xi^{ikl} = \pm \xi^{123}$（$i, k, l$ が $1, 2, 3$ から偶置換により

導かれるときは＋，奇置換なら－）であるから上の量は

$$= g\cdot(\xi^{123})^2.$$

ここで g は計量基本テンソルの成分 g_{ik} の作る行列式を示す．そこで ξ，η，ζ の張る平行六面体の体積は

$$= \sqrt{g}\cdot \mathrm{abs.}\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{vmatrix}$$

となる．これは解析幾何学の初等的公式と一致する（abs. は絶対値を意味する）．3 次元より高次元の空間の場合にはわれわれはさらに 4 次元空間要素に話を移すことができる．

さてひとつの 1 階共変テンソル a_i は任意の 1 次元空間要素 ξ^i に座標系のとりかたに無関係な，つまり不変な数 $\sum a_i\xi^i$ を（ξ について線形な対応で）対応させる．また 2 階反対称共変テンソル a_{ik} は 2 次元空間要素 ξ^{ik} に不変な数 $\frac{1}{2!}\sum a_{ik}\xi^{ik}$ を一次的に対応させる．同様に 3 階反対称共変テンソル a_{ikl} は 3 次元空間要素 ξ^{ikl} に数 $\frac{1}{3!}\sum a_{ikl}\xi^{ikl}$ を一次的に対応させる，……．このように反対称共変テンソルは各次元の空間要素を不変な数に線形対応させる．このために反対称共変テンソルを簡単に**線形テンソル**（または一次テンソル）と呼ぶ．ここで線形テンソルに関するつぎの二つの演算は大事である：

$$a_ib_k - a_kb_i = c_{ik}, \tag{37}$$

$$a_ib_{kl} + a_kb_{li} + a_lb_{ik} = c_{ikl}. \tag{38}$$

（37）は二つの 1 階線形テンソルから 2 階線形テンソルを

作る公式である．また（38）は1階と2階の線形テンソルから3階の線形テンソルが導かれることを示している．

ときには今まで述べてきたものよりもっと複雑な対称性をもったテンソルに出会うことがある．たとえば，四・一次形式（Quadrilinear Form）$F(\xi,\eta,\xi',\eta')$ の仲間のなかで特に重要な役目をするものがある．それはつぎのような対称性をもつものである：

$$F(\eta,\xi,\xi',\eta')=F(\xi,\eta,\eta',\xi')=-F(\xi,\eta,\xi',\eta') \quad (39_1)$$

$$F(\xi',\eta',\xi,\eta)=F(\xi,\eta,\xi',\eta') \quad (39_2)$$

$$F(\xi,\eta,\xi',\eta')+F(\xi,\xi',\eta',\eta)+F(\xi,\eta',\eta,\xi')=0. \quad (39_3)$$

ところで，任意のひとつの2次元空間要素

$$\xi^{ik}=\xi^i\eta^k-\xi^k\eta^i$$

の任意のひとつの二次形式 $Q(\xi^{ik})$ を考えよう．一方，また条件（39_1）～（39_3）を満足するひとつの四・一次形式 $F(\xi,\eta,\xi',\eta')$ を考える．その ξ',η' をそれぞれ ξ,η に一致させたとき，この F が，さきに考えた二次形式 $Q(\xi^{ik})$ に一致するような F はひとつあり，そしてただひとつにかぎることが証明できる．それゆえ，面要素（すなわち2次元空間要素）の二次形式を表わすのに（39）の対称性をもった4階共変テンソルが利用される．

最後に5階テンソル F について，ひとつの例を用いて，その対称条件を示してみよう．このテンソルの第1,2,4番目の変数列は反傾に，第3,5変数列は共傾に変換されるものとする．このとき F に対する対称条件の最も一般的な形

は

$$\sum_S e_S F_S = 0$$

の形で表わされる．S はすべての置換を示す．ただしその場合，反傾変数は反傾変数どうしの間で，また共傾変数は共傾変数どうしの間でのみ置換をうけることはいうまでもない．それ以外の置換は S には含まれない．F_S は F に置換 S をほどこした結果である．e_S は置換 S に対応してきまる数値である．$\sum$ はすべての許された置換にわたって和をとることを示す．タイプのきまったひとつのテンソルのあらゆる対称条件はすべて上記のような形式で表現される．

§8 テンソル解析．張力テンソル

空間的にひろがっている物理系の，場所ごとに変化する状態を記述する量は，ひとつの値を与えるだけでは不十分で，空間の各点における値を与えるものでなければならない．このような量は，数学的には“場所の関数”といわれる．この量がひとつのスカラー，ベクトルあるいはテンソルであるに応じて，それぞれ**スカラー場**，**ベクトル場**，**テンソル場**と呼ばれる．したがって空間の各点において，つまり空間のあるきまった領域にわたってひとつのスカラー，あるいはベクトル，またはテンソルがあたえられたときはじめて，それぞれの場が与えられたことになる．その場合もしひとつのきまった座標系を用いれば，スカラー量の値，ならびに，この座標系からみたベクトルまたはテンソル量

の成分の値は，いま問題になっている空間領域に属する空間点の座標の関数として表わされることになる．

ひとつのテンソル場から，これをその座標変数で微分することによって，座標系のとりかたに無関係なやりかたで，新しいテンソル場を作りだすにはどうすればよいかを教えるものがテンソル解析である．これもテンソル代数と同様に，きわめて簡単なものである．それは唯一の演算，微分だけである．

いま

$$\varphi = f(x^1, x^2, \cdots, x^n) = f(x)$$

がひとつのあたえられたスカラー場であるとする．いま点 (x) を無限小だけずらし，そのため座標が dx^i だけ変化したとすれば，これにともなう φ の値の変化は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n$$

であたえられる．この式はつぎのようなことを意味する．いま Δx^i は有限の大きさの変位の成分を示し，Δf はこれにともなう f の値の変化とすれば，

$$\Delta f \quad と \quad \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Delta x^i$$

の差は，$\Delta x^i \to 0$ とともに 0 となるばかりでなく，たとえば $|\Delta x^1| + |\Delta x^2| + \cdots + |\Delta x^n|$ をもって変位の大きさを表わすとすれば，この変位の大きさにくらべて上の二つの量の差は 0 とみなすことができる．そこでこの微分に変数列 ξ^i のひとつの一次式

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\xi^i$$

を対応させる．もし上に述べたことを他の新しい座標系を基準として，くりかえせば，もし ξ^i が座標系の基礎ベクトルに反傾に変換されるとすれば，同じ形に作られた新しい一次形式はもとのそれと値が一致する（但し一次式の意味について上に述べたことを考慮せよ）．したがって

$$\frac{\partial f}{\partial x^1},\ \frac{\partial f}{\partial x^2},\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x^n}$$

はひとつのベクトルの共変成分である．これはスカラー場 φ から座標系のとりかたに無関係な方法で微分により作られたものである．普通のベクトル解析では，これは**勾配**（**Gradient**）として登場するもので，記号で $\mathrm{grad}\,\varphi$ と記す．互いにごく接近した二点P，P′のそれぞれの座標を x^i，および x^i+dx^i とすれば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ は反変成分 dx^i をもったひとつのベクトルである〔訳者注：ここに述べたように dx^i はひとつのベクトルの反変成分であるが，x^i 自身はベクトルの反変成分とならないような場合も後にでてくる．したがって上側に添字をつけることは，いささかまぎらわしい．本書の原著では普通の習慣にしたがって x_i と記している．しかし本書では，記号の統一を保つため，dx^i はもちろん，x^i 自身についても，（たとえそれがベクトルの成分を示さないときでも）上側に添字をつけることにする〕．

上の微分演算はスカラー場ばかりでなく，任意の階数の

テンソルにも移すことができる．たとえば $f^h_{ik}(x)$ は3階テンソル場の成分で (ik) について共変，(h) について反変とする．そのときは

$$f^h_{ik}\xi_h\eta^i\zeta^k$$

はひとつの不変量である．但し ξ_h は任意の共変ベクトルの成分で，その値は定数，つまり x に無関係，同様に，η，ζ も x に無関係な任意の二個の反変ベクトルの成分である．いま点 (x) に無限小の変位（その成分は dx^i）をあたえると，それに応じたこの不変量の値の変化は

$$\frac{\partial f^h_{ik}}{\partial x^l}\xi_h\eta^i\zeta^k dx^l.$$

したがって

$$f^h_{ikl} = \frac{\partial f^h_{ik}}{\partial x^l}$$

は4階テンソルの成分である．このテンソルももとの3階テンソルから座標系に無関係なやりかたで作りだされたものである．以上が微分の操作の説明である．これによりテンソルの階数は1だけふえる．なおつぎの点に注意されたい．すなわち計量基本テンソルは場所に無関係，つまり x に依存しないから，たとえば上の例で，f^h_{ik} の添字 k を上に移すことによって

$$f^{hk}_{i\ l} = \frac{\partial f^{hk}_i}{\partial x^l}$$

を求めることもできる．つまりテンソルの反変性と共変性との間の移行操作と微分演算とはどちらをさきに行なって

もよい．テンソルの微分は，そのテンソルと，

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{40}$$

という共変成分をもつひとつのベクトルとのベクトル積を作るというまったく形式的な方法で実施できる．つまり微係数 $\partial f/\partial x^i$ は f と $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ の単なる記号的かけ算として扱われることになる．上の記号的ベクトル（40）は，文献ではしばしば“ナブラー・ベクトル”（あるいは ∇ - ベクトル）という不思議な名前でよばれる．

例　共変成分 u_i をもつひとつのベクトルからは微分により 2 階のテンソル $\partial u_i/\partial x^k = u_{ik}$ ができる．特にこれから

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \tag{41}$$

ができる．これは 2 階線形テンソルの共変成分である．普通のベクトル解析ではこれは回転（Rotation，記号では rot または curl）に相当する．これに対して

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right)$$

は，対称 2 階テンソルの共変成分である．いま空間的にひろがった物質の，点（x）におけるその物質の小部分の速度をベクトル u（これはしたがって x の関数）と解釈すれば，ある点でこの対称テンソルのすべての成分が 0 となることは，その点のまわりでこの物質があたかも剛体のように運動することを示す．それゆえこれが **“ひずみテンソル”**（Verzerrungstensor）と呼ばれるのも当然である．最後に

u^i_k から縮約によってスカラー

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^i}$$

を作ることができる．これはベクトル解析では**発散**（Divergenz，記号で div）として知られている．

混合成分 S^k_i をもつ 2 階テンソルからは微分と縮約によりベクトル

$$\frac{\partial S^k_i}{\partial x^k}$$

がうまれる．

v_{ik} を 2 階線形テンソル場の成分とすれば，公式（38）の b をこの v で，またその a を記号的ベクトル $\dfrac{\partial}{\partial x}$ でおきかえることによって 3 階線形テンソルを作り出すことができる．その成分は

$$\frac{\partial v_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial v_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial v_{ik}}{\partial x^l}. \tag{42}$$

（41）の u_i がひとつのスカラー場の grad ならば，（41）は恒等的に 0 となる．また（42）の v_{ik} が任意のひとつのベクトル u_i の rot ならば，（42）は u_i がどんなものであろうと 0 になる．

張力テンソル　テンソル場に対するひとつの重要な例は弾性体における張力テンソルである．テンソルという名前も実はこの張力の例にもとづいている．いま弾性体の表面には外から張力または圧力が働き，またその内部ではその物体の個々の小部分に，さらに，何かの“体積力”（体積に

比例する力，たとえば重力）がはたらいて弾性体は全体として，平衡状態にあるとする．その場合，歪みに応じた物質の凝集力が，外から働いているこれらの力と平衡をたもつことになる．いまこの物体の任意の小部分 J を物体の中から切り出したと想像してみよう．この切り出した小部分をもとの物体の中にあった通りに，つまり歪みの状態をそのままに保持し，物体の他の部分から隔離したとする．このようにすれば，この J に働いている“体積力”はもはやこれとバランスする相手の力をもっていないことになる．この外力は，J をとりかこんでいた物体の他の部分から J の表面 Ω に働く圧力によって均衡が保たれていたのである．もしわれわれが物質の原子的微細構造にたちいらないならば，凝集力はただ直接に接している部分にだけ作用すると考えることができる．その結果，J 以外の部分から J への力は J の表面に働く圧力によって表わされる．そこでいま J の表面要素 $d\sigma$ に働く圧力を $\boldsymbol{S}d\sigma$ とする．ここに $\boldsymbol{S}$ は単位面積に働く圧力である．その場合 $\boldsymbol{S}$ は $d\sigma$ の在る場所，およびこの表面要素の法線 n の方向（n は J の内側に向くものとする）に依存する．そこで $\boldsymbol{S}$ が n に依存することを示すために $\boldsymbol{S}_n$ とかくことにする．$-n$ は n と平行だが向きが反対の法線の方向を示すとすれば，無限に薄い小円板に働く圧力の平衡を考えると，

$$\boldsymbol{S}_{-n} = -\boldsymbol{S}_n \tag{43}$$

がなりたつはずである．

ここで直交座標 x^1, x^2, x^3 を用いよう．ある一点におけ

る単位面積あたりの圧力で特に J の内向き法線が x^1 軸の正方向に向く表面要素に働く圧力を $\boldsymbol{S}_1$ と記す．同様に x^2, x^3 軸の正方向を向く法線をもつ面積素片に働く圧力を $\boldsymbol{S}_2$，$\boldsymbol{S}_3$ と記す．ここで 3 個の任意の正の数 a_1，a_2，a_3 と，もうひとつの無限に小さい正の数 ε（これは後に 0 に移行させる）を考えよう．今問題にしている物体中の一点 O から各座標軸の正の方向に線分

$$\mathrm{OP}_1 = \varepsilon a_1, \quad \mathrm{OP}_2 = \varepsilon a_2, \quad \mathrm{OP}_3 = \varepsilon a_3$$

を考える．これらにより作られる無限小の四面体 $\mathrm{OP_1P_2P_3}$ を考える．これは三つの壁 $\mathrm{OP_2P_3}$，$\mathrm{OP_3P_1}$，$\mathrm{OP_1P_2}$ とひとつの屋根 $\mathrm{P_1P_2P_3}$ からできている．いまこの屋根 $\mathrm{P_1P_2P_3}$ の面積を f，その内向き法線 n の方向余弦を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば，3 枚の壁の面積は

$$-f\cdot\alpha_1 \ \left(=\frac{1}{2}\varepsilon^2\cdot a_2 a_3\right), \quad -f\cdot\alpha_2, \quad -f\cdot\alpha_3$$

となる．そこで無限小の ε に対して，壁および屋根に働く圧力の総和は

$$f\{\boldsymbol{S}_n-(\alpha_1\boldsymbol{S}_1+\alpha_2\boldsymbol{S}_2+\alpha_3\boldsymbol{S}_3)\}.$$

f は ε^2 の程度の量であり，他方この四面体に働く“体積力”はこの体積に比例して ε^3 の程度の量である．したがって体積力は無視できて，力の平衡条件から

$$\boldsymbol{S}_n = \alpha_1\boldsymbol{S}_1+\alpha_2\boldsymbol{S}_2+\alpha_3\boldsymbol{S}_3$$

となる．公式（43）のたすけをかりれば，この関係式は，ここに考えた四面体と面を接している他の 7 個のこれに似た四面体についても，成立することがわかる．いま $\boldsymbol{S}_i$ の

(いま用いている直交座標系を基準とした) 3 成分を S_{i1}, S_{i2}, S_{i3} と記し, ξ^i, η^i は任意の二つの大きさが 1 の変位ベクトルとすれば,

$$\sum_{ik} S_{ik}\xi^i\eta^k \tag{44}$$

は, 内向き法線が ξ である面積素片に働く圧力の, ベクトル η の方向への射影を意味する. したがって (44) は座標系に無関係な意味をもち S_{ik} はひとつのテンソル場, すなわち "張力テンソル" の成分である. ここでさらに直交座標系を使うことにすれば, 共変と反変の区別は不要となる.

ここで, 成分 S_{1i}, S_{2i}, S_{3i} をもつ三個のベクトル $\boldsymbol{S}'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を考える. 内向き法線が n である面積素片の法線 n 方向への $\boldsymbol{S}'_1$ の射影は, $\boldsymbol{S}_n$ の x^1 - 成分に等しい. そこで切りとられた物体の小部分 J の表面 Ω にはたらく全圧力の x^1 - 成分は $\boldsymbol{S}'_1$ の法線成分の Ω 全体にわたる表面積分に等しい. したがってこれはガウスの定理により J 内の体積積分

$$-\int_J \operatorname{div} \boldsymbol{S}'_1 \cdot dV$$

に等しい. 同様なことは x^2, x^3 - 成分についてもなりたつ. そこで

$$p_i = -\sum_k \frac{\partial S^k{}_i}{\partial x^k}$$

を成分とするベクトル $\boldsymbol{p}$ が存在することになる (この $\boldsymbol{p}$ の導きかたは直交座標系のとりかたに無関係である). これを

使うと上に述べたことから，"体積力" $\boldsymbol{p}$（$\boldsymbol{p}$ の大きさは，単位体積あたりの体積力の大きさを示す）は任意の小部分 J について

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{S}_n d\sigma = \int_J \boldsymbol{p} dV \tag{45}$$

を満足する．この意味で $\boldsymbol{p}$ は圧力 $\boldsymbol{S}$ と同等である．いま $\boldsymbol{k}$ を単位体積あたりの外力（体積力）とすれば，J に対する力の平衡条件（第一平衡条件という）から

$$\int_J (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}) dV = 0.$$

J は任意の小部分であるから

$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k} = 0 \tag{46}$$

となる．

いま任意の一点 O を原点にとり，O から問題にしている点 P まで引いた線分 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\boldsymbol{r}$ で表わす．また［ ，］はベクトル積を示すとすれば，第二平衡条件，すなわち力の能率に対する平衡条件は

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{S}_n] d\sigma + \int_J [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}] dV = 0$$

である．(46) は一般に成立するから，これを上式に代入すれば

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{S}_n] d\sigma = \int_J [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}] dV.$$

$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{S}_n]$ の x^1-成分は，$x^2 \boldsymbol{S}_3' - x^3 \boldsymbol{S}_2'$ の n 方向への射影に等しいことはすぐにわかる．そこでガウスの定理により上

式の左辺の x^1 - 成分は

$$= -\int_J \operatorname{div}(x^2\boldsymbol{S}_3' - x^3\boldsymbol{S}_2')\cdot dV.$$

そこで上の式の両辺の x^1 - 成分を比べると

$$\operatorname{div}(x^2\boldsymbol{S}_3' - x^3\boldsymbol{S}_2') = -(x^2p_3 - x^3p_2)$$

が導かれる．この左辺はさらにつぎのように書きかえられる；

$$= (x^2 \operatorname{div}\boldsymbol{S}_3' - x^3 \operatorname{div}\boldsymbol{S}_2') + (\boldsymbol{S}_3'\cdot\operatorname{grad}x^2 - \boldsymbol{S}_2'\cdot\operatorname{grad}x^3)$$

$$= -(x^2p_3 - x^3\boldsymbol{p}_2) + (S_{23} - S_{32}).$$

同様の議論は，x^2，x^3 - 成分についてもなりたつ．この結果ともとの式の右辺を比べると，結局

$$S_{23} = S_{32}, \qquad S_{31} = S_{13}, \qquad S_{12} = S_{21}.$$

つまり，張力テンソル S は対称であることがわかる．成分 ξ^i をもつ任意の変位ベクトルに対して

$$\frac{\sum S_{ik}\xi^i\xi^k}{\sum g_{ik}\xi^i\xi^k}$$

はベクトル ξ に垂直におかれた単位面積の小平面にはたらく圧力の ξ 方向の成分を意味する（この解釈も任意のアフィン座標系について成立する）．以上をまとめると，**張力（力の向きによっては圧力といってもよい）はひとつの体積力と完全に同等である．この体積力は，単位体積あたりのそれを $\boldsymbol{p}$ とすれば，つぎの不変な公式により，張力テンソル S から計算できる：**

$$-p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}. \tag{47}$$

もし圧力 p が等方的ならば,

$$S_i^k = p \cdot \delta_i^k, \qquad p_i = -\frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

以上述べたことで，張力テンソルという概念は正確に公式化され，数学的表現があたえられたことになる．弾性体の理論の基本法則を創るには，さらに上に述べた張力テンソルが，外力によって物体内におきた歪(ひず)みの状態に応じて，どのように決定されるかを示す法則が必要である．しかしここで，この問題にこれ以上に深くたちいる余裕はない．

§ 9 定常電磁場

いままで力学的または物理学的なことについて論じたときは，どこにその空間的な性質があらわれているかを示すのが目的であった．あるいはまたその法則を不変なテンソルの関係式として示すことが目的であった．しかしそれと同時にこのような具体的な例をとおしてテンソル算の意義を明らかにすることもできた．また物理理論それ自身のため，さらに時間の問題に対する物理理論の意義を究明するために，あとで物理学の理論の根本問題について議論をするが今までの具体例はそのためのよい準備ともなった．このような観点において電磁場の理論（それは今日われわれが知っているなかでは最も完全な物理学の一部門であるが）

は最大の重要さをもつことになる．しかしここではなお，時間が問題にならない場合に限って論ずることにする．すなわち時間的に変化しない定常場に限ることにする．

静電場に対する**クーロンの法則**はつぎのようにいい表わすことができよう：密度 ρ の電荷が空間内に分布しているとする．そのときこれらの電荷が別のひとつの電荷 e におよぼす力は

$$\boldsymbol{K} = e \cdot \boldsymbol{E} \tag{48}$$

であたえられる．ここに $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = -\int \frac{\rho \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} dV \tag{49}$$

であたえられる．ここで，電場 $\boldsymbol{E}$ を知ろうとする点を O，また空間内の任意の点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をベクトル $\boldsymbol{r}$ で表わす．r は $\boldsymbol{r}$ の長さ，dV は点 P における体積素片で，P の位置座標について積分が行なわれる．e に働く力は二つの因数の積からなる．すなわち小さい試験体の電荷 e と“場の強さ” $\boldsymbol{E}$ である．後者は空間内に分布するあたえられた電荷分布だけできまる量であり，他方 e は試験体だけに関係するが，場の様子には無関係である．このことからわれわれは電場についてつぎのような描像を得る．すなわち，たとえば試験体を用いてそれに働く力 $\boldsymbol{K}$ を観測しようとしなくても，空間に分布している電荷によりひとつの“電場”がつくられている．この電場はベクトル $\boldsymbol{E}$ で記述される．もしこの電場のなかに点電荷 e を持ちこめば，それにはたらく力は (48) であたえられる．$\boldsymbol{E}$ はつぎの公式

によってひとつのポテンシャルから導かれる：

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad 4\pi\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV. \tag{50}$$

この式からつぎのことがわかる：1）$\boldsymbol{E}$ の rot は 0 となる．すなわち渦なしである，2）あるひとつの閉曲面を通して流れでる $\boldsymbol{E}$ の総量は，この閉曲面で包まれた電荷の総量に等しい，いいかえれば電荷は電場の源である．1），2）を式でかくと，

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho. \tag{51}$$

（51）という微分形式に表わされた法則から逆にクーロンの法則に帰ることは可能である．ただしその場合，$\boldsymbol{E}$ は無限の遠方では 0 になるという条件をつけなければならない．これを以下に示そう．まず（51）の第一式から，$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ とおくことができる．これを第二式に代入すれば，ポアッソン型の方程式 $\Delta\varphi = -\rho$ が求められる．これの解は（50）の右側の式にほかならない．

クーロンの法則はひとつの**遠隔作用の法則**である．この法則では，ある場所における場の強さは他の場所にある電荷，すなわち空間内で，すぐ近くから，最もはなれた所にある電荷にいたるまで，すべてのものに依存することになる．これに反して，ずっと簡単な公式（51）は**近接作用の法則**のかたちをしている：なんとなれば，ある場所におけるひとつの関数の微係数をきめるには，問題にしている場所の無限小近傍におけるこの関数の値の様子を知れば十分である．そこで，（51）によってある一点とその無限小近

傍における $\boldsymbol{E}$ と ρ の値だけが互いに結びついていることになる．このような近接作用的法則こそ，自然界における作用の伝達則の真の表現法であるとわれわれは思う．したがって（49）はこのように正しく書かれた法則から単に数学的に導かれた結果にすぎないと考えられる．非常に簡単な直観的な意義をもつ（51）によって，直観的に受けいれにくいクーロンの法則がどこから来たものであるかをわれわれは理解することができたと信ずる．ここでわれわれが近接作用論を好むことは，たしかにわれわれが認識論的なひとつの強制に従っていることを示すものである．既にライプニッツは連続および近接作用の要請をひとつの一般的な原理として公式化した．そのため重力に対するニュートンの遠隔作用的法則を受けいれることがついにできなかった．このニュートンの重力の法則はまさにクーロンの電気の法則に相当するものである．近接作用の問題のほかに，（51）の数学的にみた明快さとその簡単な直観的な意味もまた注目すべき点である．実際われわれは物理学の世界でつぎのようなことをしばしば経験している：すなわちある一連の現象の中にひとつの法則性のあることがひとたび発見されれば，その法則は完全に数学的に調和のとれた公式により表現されるということである．最後に物理的な面に関して述べれば，古い遠隔作用的考えかたから近代的な近接作用的な見かたに移ったことがいかに大きなみのりを物理学にもたらしたかについて，マックスウェルの理論は，その後のこの理論の発展の過程で，確固たる証明をあたえた．

電場の源である電荷に場がおよぼす力は，単位体積あたり

$$\boldsymbol{p}=\rho\boldsymbol{E} \tag{52}$$

であたえられる．そこでわれわれは（48）の正確な意味づけをしなければならない．いまひとつの電荷をもった試験体を電場の中に持ちこんだとする．この電荷は，もともと電場をつくっていた電荷の仲間にはいる．そこでこの試験体をもちこむ以前の電場 $\boldsymbol{E}$ を正確に測定するのに（48）が役立つためには，試験体の電荷 e が十分に小さくて，その結果，それがもともとの電場に，測定にかかるほどの変化をあたえないことが必要である．この事情は実験物理学のいたるところで，ぶつかるひとつの困難である．すなわち測定器を持ちこむことによって測定しようとしていたもともとの状態が乱されてしまうという困難である．実験誤差の相当の部分はこのことにもとづく．この誤差の除去について実験家は，大いにその英知を傾けねばならない．

さて力学の基本法則；**質量×加速度＝力** はあたえられた力の作用のもとに，質量をもつ物体がどんな運動をするかを教えてくれる（ただし最初の速度は与えられているものとする）．しかし力の本質がなんであるかを力学は教えてくれない．むしろわれわれは力の正体がなんであるかを力学以外の物理学において経験する．したがって**力学の基本法則はひとつの完結した体系とはいえない．しかしもし力学に登場する力の概念が物理学によってその具体的内容をあたえられれば，はじめて力学の理論体系は完結され**

る．それゆえ力学を，それ自身だけで完結したひとつの理論体系として発展させようとする不幸な試みは（力の説明を力学以外の物理学に求めなかったために），その基本法則を単なる言葉による定義，すなわち“力とは　質量×加速度　のことである”という定義におきかえる以外には他に方法がなかった．しかし静電気学では，ある特別な一群の物理的現象において力とはなにか，またそれは状態を示す量，つまり電荷や電場から（52）に従って規則的にどのように決定されるかを知ることができる．いま電荷が与えられたものとすれば，場の方程式（51）は，この電荷が，自己のつくる電場の様子をどのように決定するかを教えてくれる．しかし電荷の正体に関しては，それが物質に結びついているものであることをわれわれは承知している．現代の電子論によれば，物質は，あるきまった質量とあるきまった電荷をもった電子と呼ばれる素粒子からできあがっている．したがって新たに電荷が発生したことが観測される場合は，それは単につぎのような事情にもとづく．すなわちもともとは正負の素電荷が互いに隣接して存在していたために，これを遠方から見れば，これらの素電荷からの作用は互いに相殺して電気的に中性に見えていたものが，たまたま，これら正負の電荷が分離した結果，あたかも新たに電荷が発生したように見えるのである．それゆえこのようなときには必ず，正負の同量の電荷が発生する．そこで結局，法則はひとつのサイクルを形成する：きまった電荷をもち物質を構成していると考えられる素粒子の空間的分

布状態，ならびに，その速度（これは非定常的な場合には付け加える必要がある）が電場を決定する；この場は (52) に従って電荷をもった物質に力をおよぼす；この力は力学の基本法則によって加速度を決定し，したがってつぎの瞬間における物質の分布状態や速度を決定する．もし物質の運動が，われわれの直接に観測できるものである（さもなければ，条件つきで観測可能なものである）と仮定すれば，ここに述べた理論的関係の全体を実験的に検証することは可能である．しかしこの理論のサイクルから取り出された個々の法則については検証は可能ではない！　ところでわれわれが直接，実験的に経験することと，その背後にひそむ客観的なものとして，われわれの理性が理論のなかで概念的にとらえようとするものとの関係は，理論が主張する個々の事が直接に直観的に証明できるような意味をもつものであると考えてよいほどには簡単なものではない．本書では，上述のような力学と物理学の結合ばかりでなく，さらに幾何学が加わり，これら三者が分離できない理論的なひとつの統一体を形成することが，以後次第に明らかにされるであろう．またわれわれの主観的な意識経験の中に表われた超意識的な現実を合理的にとらえているかどうかが問題になるときは，常にわれわれはこれら個々の科学によるのではなく，三者の統一体によって判断しなくてはならない．真実はただひとつの体系を作るものである．ここに概説された物理学的世界像は，上に述べたこと以外の特徴として，物質と場からなる二元論であるという特徴をもつ．

この物質と場のあいだにはもちろん相互作用がある．われわれはあとで，この二元論を克服できるかどうか，またそれにはどうしたらよいかを研究しなければならない．

電場内で電荷にはたらく力を，ファラデーは一種の張力によるものと考えた．ここでわれわれは直交座標系 x^1, x^2, x^3 を用いる．また電場の強さの成分を E_1, E_2, E_3 とかく．力の x^i 成分は

$$p_i = \rho E_i = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3}\right) E_i .$$

$\boldsymbol{E}$ の rot が 0 となることを考えにいれ，簡単なかきなおしをすると，(47) によって，単位体積あたりの力の成分 p_i は，ひとつの張力テンソルから導かれることがわかる．このテンソルの成分を S_{ik} とすれば，それはつぎのとおりである．

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{2}\{-(E_1)^2+(E_2)^2+(E_3)^2\}, & -E_1E_2, & -E_1E_3, \\ -E_2E_1, & \frac{1}{2}\{-(E_2)^2+(E_3)^2+(E_1)^2\}, & -E_2E_3, \\ -E_3E_1, & -E_3E_2, & \frac{1}{2}\{-(E_3)^2+(E_1)^2+(E_2)^2\}, \end{matrix}\right| . \tag{53}$$

これは対称条件 $S_{ik} = S_{ki}$ を満たしている．ここで特に重要なことはひとつの場所における張力テンソル成分が，ただその同じ場所における電場の強さだけに依存するということである（さらに張力テンソルは電場だけに依存し直接には電荷にさえ無関係であることも大切である）．ところで (47) によって力 p がひとつの対称2階テンソルである張力

S に還元されるならば（任意の点における S は，物理的状態を記述する状態量，つまり電場の同じ点における値だけに依存する），われわれは張力テンソルこそ第一義的な量であり，力の作用はそれの結果であると考えるべきであろう．このような解釈の妥当性は数学的には，力 p が張力テンソル S の微分により与えられるという事情により示されている．したがって張力テンソルは，力に比べて，いわば，1 階だけ p を積分したものに相当する．しかしそれにもかかわらず，積分形式に書きあらわされた法則の場合とは異なり，この S は全空間における状態に依存するのではなく，いま問題にしている空間内のただ 1 点における状態のみに依存している．また物理学的にみれば，p が S の微分で表現されることはつぎの理由からなによりも意義深いことである．電荷をもった物質系がそれ自身におよぼす力の総和は，その結果生ずる力の回転能率と同様に，0 となるべきであるが，上述の p の表現からこのことが導かれるということである．なんとなればこの力の総和の第 i 成分 K_i は，この物体系を包む大きな閉曲面 Ω の表面を通してベクトル

$$\boldsymbol{S}_i = (S_{i1},\ S_{i2},\ S_{i3})$$

が流れ出る場合のその総量に等しい．ところで電荷が存在しない場所では $\operatorname{div} \boldsymbol{S}_i = 0$ であるから，ガウスの定理により，物体系を包んでいる Ω なら，その形がどうであろうと，上述の流れの総量の値は Ω の形に無関係である．そこで Ω として無限に大きな球面をとれば，K_i は 0 となる．力の回転能率を計算するには，ベクトル $\boldsymbol{S}_i$ のかわりに，ベクト

ル積 $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{S}_i]$ を用いればよい．ここで回転の中心 O から，$\boldsymbol{S}_i$ の値を問題にしている Ω 上の点 P（この点について面積分を行なう）に向かうベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\boldsymbol{r}$ である．そこで運動量保存の法則，および角運動量保存の法則から，電荷をもった物体のひとつの閉じた体系は，それがはじめ静止していたら，それ以後もこの体系は全体としての並進運動や，回転運動を行なわない．ここで上に述べた Ω として，荷電体を二つの部分 M′，M″ に分断し，この一方の部分 M′ を内に包むような閉曲面 Ω をえらんだとしよう．この場合には $\boldsymbol{S}_i$ および $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{S}_i]$ の流れが Ω を通して流れ出る量は 0 とはならない．これらはそれぞれ M′ から M″ におよぼす力，および力の回転能率の第 i 成分をあたえる．この場合にも，Ω が物体を M′ と M″ に分断しているかぎりこの力やその能率の値は Ω の形に無関係である．前に述べた p が S の div で表わされるという事実から，M″ が M′ におよぼす力および力の能率は，M′ が M″ におよぼすそれと大きさ，方向が等しく，向きだけが正反対であることが容易に導かれる．これはまさに作用と反作用が等しいという原理にほかならない．さらに M′ および M″ の内部における電荷分布を変化させても，M′ と M″ の境界上の電場の様子が不変にたもたれるならば，M′ から M″ に働く力や力の能率はもとのままであることも導かれる．

さてテンソル (53) の形はもちろん，座標系のとりかたには無関係である．いま電場の強さ $\boldsymbol{E}$ の大きさの 2 乗を

$$|E|^2 = E_i E^i$$

とかけば,

$$S_{ik} = \frac{1}{2} g_{ik} |E|^2 - E_i E_k$$

となる．もし E_i が電場の強さ $\boldsymbol{E}$ の共変成分を示すならばこの S_{ik} は，単に直交座標系のみならず，任意のアフィン座標系でもなりたつ数式である．

張力テンソルの直観的な意味は非常に簡単である．いまある場所で直交座標系を用意し，その x^1 軸はその点における $\boldsymbol{E}$ の方向を向いているとすれば,

$$E_1 = |E|, \qquad E_2 = 0, \qquad E_3 = 0.$$

そこで S_{ik} は力線の方向（つまり軸 x^1 の方向）をもつ $\frac{1}{2}|E|^2$ の強さの張力と，同じ強さで力線に垂直の方向の圧力からできている．

さて静電気学の基本法則はつぎのようなテンソル形式に書きあらわされる：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial E_k}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^k} = 0 \quad \text{または} \quad E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} && \text{(I)} \\ &\frac{\partial E^i}{\partial x^i} = \rho && \text{(II)} \\ &S_{ik} = \frac{1}{2} g_{ik} |E|^2 - E_i E_k && \text{(III)} \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

点電荷 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ からなるひとつの物理系はポテンシャル・エネルギー

$$U = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

をもつ．r_{ik} は e_i と e_k の間の距離を示す．これはつぎのこ

とを意味する．すなわち個々の点電荷に，それ以外の点電荷から作用している力が，はじめの点電荷を無限小の距離だけ仮想的に変位させるとき，これにあたえる仕事の（すべての点にわたる）総和が全微分，すなわち δU に等しいことを示す．もし点電荷のかわりに電荷が空間に連続的に分布しているときは，つぎのような積分になる：

$$U=\frac{1}{8\pi}\iint\frac{\rho(\mathrm{P})\cdot\rho(\mathrm{P}')}{r(\mathrm{P},\ \mathrm{P}')}dV\,dV'.$$

ここで点 P，P′ についての二重の体積積分は全空間にわたって行なうべきものである．また $r(\mathrm{P},\ \mathrm{P}')$ は二点 P，P′ の間の距離を示す．もしポテンシャル φ を使えば，この U は

$$U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi dV$$

となる．この被積分関数は $\varphi\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{E}$ に等しい．ところで公式

$$\operatorname{div}(\varphi\cdot\boldsymbol{E})=\varphi\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi$$

とガウスの定理を使うと，$\operatorname{div}(\varphi\cdot\boldsymbol{E})$ の全空間にわたる積分が 0 に等しいことを考えにいれて

$$\int\rho\varphi dV=-\int\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi dV=\int|E|^2dV.$$

したがって，U は

$$U=\frac{1}{2}\int|E|^2dV \tag{55}$$

のように書きあらわされる．

この結果はクーロン型の遠隔作用によらなくても，つぎのように導くことができる．いま現在のポテンシャル φ を作っている現存の電荷に各単位体積あたり無限小の電荷 δe が付け加わったとする．たとえばこの δe は無限の遠方から，今問題にしている単位体積が在る場所まで電気力にさからってわれわれが持ちはこんできたとする．そこでこの運搬のためにはわれわれが $\varphi\cdot\delta e$ なる仕事，つまりエネルギーをこの物理系にあたえる必要がある．上のような操作を各店の電荷密度に対して行なえば，電荷密度 ρ は $\delta\rho$ だけ増加し，このような変化を引きおこすには

$$\delta U = \int \varphi\delta\rho\cdot dV$$

だけの仕事を物理系にあたえる必要がある．したがって δU はこのような電荷密度の増加にともなう物理系のエネルギーの増加量である．しかし

$$\delta\rho = \delta(\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}) = \mathrm{div}(\delta\boldsymbol{E})$$

がなりたつ．ここに $\delta\boldsymbol{E}$ は ρ の変化にともなう $\boldsymbol{E}$ の変化を示す．さらに

$$\mathrm{div}(\varphi\cdot\delta\boldsymbol{E}) = \varphi\cdot\mathrm{div}(\delta\boldsymbol{E}) + \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\delta\boldsymbol{E} = \varphi\cdot\delta\rho - \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}$$

であるから，div(　) の全空間にわたる積分が 0 となることを考えに入れると，δU は

$$\delta U = \int(\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E})\cdot dV$$

ともかける．これは (55) の変分をとったものに他ならない．

ここに新しく導かれた式（55）から，エネルギーは必ず正の値を持つことが証明された．ところで電気力を張力の一種と考えるならば張力が（弾性体の場合と同様に）すべての場所で正の張力エネルギー（これは張力にもとづくポテンシャル・エネルギー）と結びついていると考えなければならない．したがって荷電体の系がもつエネルギーは，電場そのものがもつエネルギーであると考えるべきであろう．この解釈について（55）はまさに満足すべき解答をあたえているといえる．すなわち場は単位体積あたり，張力に結びついたエネルギー $\frac{1}{2}|E|^2$ をもち，それは電力線の方向（ならびにこれに垂直）に働く張力（ならびに圧力）の大きさとまさに一致している．なお任意の場所におけるエネルギー密度が，**その点における場の量 $\boldsymbol{E}$** の値だけできまるということは，上に述べた解釈が妥当なものであるということに対する決定的な保証といえよう．ここで空間の全域にわたる系の全エネルギーばかりでなく，電場の任意の小区域についても，その区域のもつポテンシャル・エネルギー $\frac{1}{2}\int|E|^2dV$ というものを考えることができる．しかし静電気学では全エネルギーだけが役にたつ量である．ただ場の様子が時間的に変化するような問題に移ったときはじめて，上述の小区域ごとにもつエネルギーという解釈の正当性が立証される．

静電場では，導体上の電荷はその表面にだけあつまる．また導体の内部には電場は存在しない．したがって（51）は真空中（つまり“エーテル”のなか）の電場の様子を決

定するのに十分である．しかしもし，絶縁体，あるいは誘電体が電場のなかにあるときは**誘電分極**（dielektrische Polarisation）の現象を考えにいれなければならない．——いま 2 点 P_1, P_2 にそれぞれ $+e, -e$ の電荷があるとする．これを電気的双極子（または単に双極子）とよぶことにする．これが作る電場のポテンシャルは

$$\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),$$

ここに r_1, r_2 は電場を問題にしている点 O から，P_1, P_2 までの距離を示す．ベクトル $\overrightarrow{P_2P_1}$ に e をかけた量を双極子の能率という．ここでベクトル $\overrightarrow{P_2P_1}$ の向きを一定にしたまま，P_2 を P_1 に一致させ，同時に e が無限に大きくなる極限を考える．その時，双極子の能率 $\boldsymbol{P}$ が一定に保たれるものとする．この極限における双極子を，“二重極”（または極限をとる前と同様に双極子）と呼び，その能率が $\boldsymbol{P}$ であるという．$\boldsymbol{P}$ の作るポテンシャルは

$$\frac{\boldsymbol{P}}{4\pi}\cdot\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\frac{1}{r}$$

である．ところで，電場は誘電体の内部では，その各部分の体積素片内に電気的双極子を引きおこす．この現象を誘電分極と呼ぶ．いま単位体積あたりの双極子の能率を $\boldsymbol{P}$ とする．このような双極子の全体が作るポテンシャルも考慮すると，(50) のかわりに

$$4\pi\varphi=\int\frac{\rho}{r}dV+\int\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{grad}_{\mathrm{P}}\frac{1}{r}\cdot dV \qquad (56)$$

となる．電子論の立場からみればこの現象は容易に理解される．たとえば1個の原子はその中心に正電荷をもった核が静止しており，そのまわりを負電荷をもった1個の電子が円運動をしているものであるとしよう．電子の回転運動に対する時間的平均をとれば，電子の平均位置は核と一致し，原子から離れた所からこれをながめれば，完全に電気的に中性に見える．しかしもし外から電場がはたらけば，それは負電荷をもつ電子に力をおよぼし，その結果電子の軌道は，中心（核）から偏ったもの，たとえば楕円のようになる．このとき核は楕円の焦点に在る．そこで電子の回転運動の周期よりも十分に永い時間にわたって時間的平均をとれば，この原子はあたかも静止している双極子のように見える．もし物質をひとつの連続体として扱うときは，双極子が物質内に連続的に分布しているものとみなさなければならない．ところでこのような考えを原子論的により厳密にすすめなくても，つぎのことがなりたつことはわかる．すなわち少なくとも第一近似では，単位体積あたりの双極子能率 $\boldsymbol{P}$ は，これを引きおこしている電場 $\boldsymbol{E}$ に比例する，すなわち $\boldsymbol{P}=\kappa\boldsymbol{E}$，ここに κ はひとつの定数で，それは物質の化学的性質，つまり原子や分子の構造に依存する．ところで

$$\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)=\boldsymbol{P}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{P}$$

であるから，(56) を

$$4\pi\varphi = \int \frac{1}{r}\Big(\rho - \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\Big)\cdot dV$$

のように書きかえることができる．そこで電場の強さ $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ に対して［上の積分式と，(50)，(51) を比べると］，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \rho - \mathrm{div}\,\boldsymbol{P}$$

がなりたつ．いま電束密度（以前は電気変位といった；elektrische Verschiebung）$\boldsymbol{D}$ を

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

によって定義すれば，誘電体内における基本方程式は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \tag{57}$$

となる．これは真空中の電場に対する方程式 (51) に対応するものである．(51) の第二式の $\boldsymbol{E}$ は，(57) では $\boldsymbol{D}$ になる．つまり電荷 ρ は電束密度 $\boldsymbol{D}$ の源である．さきに述べた仮定 $\boldsymbol{P} = \kappa\boldsymbol{E}$ を使い，$\varepsilon = 1 + \kappa$（ε は誘電率）を κ のかわりに使えば，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \tag{58}$$

となる．(58) という関係は実験的に十分にたしかめられた法則である．電荷どうしの間の空間を満たしている媒質の影響はファラデーにより実験的にしらべられたもので，それは (58) の中に表わされている．この媒質の役目は，われわれがよく知っているように，近接作用の理論を作る上で重要な意味をもった．なお誘電体内における電場の張力テンソル，エネルギー，力等についても，真空中の電場に対するこれらの量の数学的表現を拡張することによって同

様な数式を導くことができるが，ここではこれ以上たちいらない．

さて遠隔作用的な考えかたを使わなくとも，誘電体内における電場の基本方程式は，H. A. ローレンツの考えにしたがって以下のように導きだすことができる．それにはまず，現実に存在している“微視的”な場と，観測の対象となる“巨視的”場を区別する．微視的場は原子の大きさの程度の小さな領域でも不規則な変動をするが，物理的状態を示す量の実際の（巨視的）測定のさいには，それは問題にならない．ところで巨視的場は，微視的場を，原子の大きさに比べて十分に大きな空間領域にわたってその平均値を求めることにより導かれる．いま $\boldsymbol{E}$ は巨視的電場を，$\bar{\rho}$ は巨視的電荷密度を示すとすれば，まず (51)〔(51) は微視的場について成立していると考えてよい〕から平均操作によって

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \bar{\rho}$$

が成立する．ところで真の電荷は一方では自由電子から，また他方では分極した原子からできている．そこで自由電子による電荷の平均から導かれる電荷密度を ρ とすれば，これは巨視的には真電荷として観測されるものである．したがって $\int_V \rho dV$ は体積 V のなかにある自由電子の電荷の総和を示す．つぎに V のなかにある分極した原子にもとづく電荷を求めよう．いま $\boldsymbol{l}$ は双極子となっている原子の中の $-e$ の電荷から $+e$ に向うベクトルとする．したがって $e\boldsymbol{l}$ は，この原子の双極子能率である．もし単位体積中にある原子

の数を N とすれば，$N\cdot e\boldsymbol{l}=\boldsymbol{P}$ が分極を示す．いま体積 V の表面 Ω の面積素片を $d\sigma$（これは Ω に比べれば無限小だが，原子の大きさに比べれば，ケタちがいに大きく，したがって巨視的なサイズである）とする．この $d\sigma$ の場所でベクトル $\boldsymbol{l}$ は V の外に向かっているとする．もし V が分極した原子の $+$ と $-$ の電荷を同時にその内に包んでいれば，V の中にある電荷の総和は 0 である．しかしもし表面 Ω がある双極子を切っているとき，つまりこの切断された双極子の一方の電荷は V の中にあり，その相手の電荷は V の外にある場合は，事情は異なる．いま $d\sigma$ によりこのように切断される双極子の正電荷は，$d\sigma$ の場所に Ω の外に向いてたつ小さな円柱の中にある．この円柱の底面積は $d\sigma$，円柱の側面は $\boldsymbol{l}$ に平行で，その体積は $d\sigma\cdot\boldsymbol{l}_n$（$d\sigma$ の外向き法線 n の方向への $\boldsymbol{l}$ の成分を $\boldsymbol{l}_n$ とする）である．この円柱内にある正電荷をもった双極子の片割れの個数は $N\cdot d\sigma\cdot\boldsymbol{l}_n$ である．したがって電荷は $e\cdot N\cdot\boldsymbol{l}_n\cdot d\sigma=\boldsymbol{P}_n\cdot d\sigma$ となる．このような電荷の総和（この個々の電荷に対して，それとともに双極子を作る相手の電荷が必ず V の中に在る）は V から外にとび出している双極子の先端についている電荷の総量を示すもので，それは $=\int_{\Omega}\boldsymbol{P}_n\cdot d\sigma$ である．そこで逆に V の中に残る双極子の端についた電荷の総和は

$$=-\int_{\Omega}\boldsymbol{P}_n\cdot d\sigma=-\int_{V}\operatorname{div}\boldsymbol{P}\cdot dV. \tag{59}$$

もし分極 $\boldsymbol{P}$ が V の内部全域にわたって一様である場合を除けば，(59) は一般に 0 でない値をあたえる．そこでわ

れわれは結局

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho - \operatorname{div} \boldsymbol{P}$$

を得る．

上に述べた (57)，(58) の導きかたからわかるように，これらの式は決して厳密な式ではない．それはむしろ場の平均値を結ぶ関係式である．この平均値とは，空間的には十分に多数の原子が含まれるほどの大きさの領域，また時間的には原子内で電子が一周するに要する時間に比べて十分に永い時間にわたっての平均を意味する．しかしわれわれは，(**57**)，(**58**) も (**51**) と同様に自然法則を厳密に表わしていると考えよう．われわれは現在も，今後も常に厳密な自然法則だけに目を向けることにする．しかしもしわれわれが現象から出発するならば，(57)，(58) のような現象論的法則は，直接，観測によりあたえられるものから厳密な最終的理論へ到達するまでに必ず一度は通過しなければならないものである．一般にわれわれはまずはじめに，観測された事象から，ひとつの理論を導きだすことができる．つぎにこの理論から出発し，物質の原子論的構造についてのある特定な描像を前提として，一種の平均操作により再びもとの現象論的理論を導きだすことができたときはじめて，出発点となった理論は厳密になりたつ正しい理論とみなされるようになる．その際，もし原子構造がわかっているならば，その理論の中に登場する物質定数の値をも同時に与えなければならない（正しい自然法則では物質定数のようなものは出て来てはならないはずである）．(58)

のような物質の性質に関係する法則は，物質の影響をただ総括的にとりいれているにすぎないので，物質の微細な構造を無視できないような現象に対しては，このような法則は役にたたない．したがってこのような現象論の適用限界は原子論的理論から当然導かれるべきものである．またこの限界をこえた所では，現象論にとってかわるべき新しい理論も導き出されるはずである．電子論は原子の微細な構造や，その内部における現象を解明するという困難な仕事のために，その最終的な理論に到達するにはなお永い時間を要するであろうが，それにもかかわらず，多くの分野で，誇るべき大きな成果をすでにあげている．

永久磁石についての最初の経験によれば，磁気の理論は，電気の単なるくりかえしにすぎないように思われる．すなわち，磁気についてもまたクーロンの法則がなりたつ．しかし磁気には電気とはまったくちがった性質がある．われわれは正負の磁荷を互いに分離できない．すなわち磁場には単独の源は存在しない．在るのは正負の磁荷の対，つまり二重極だけである．磁石は無限に小さい素磁石からできていると考えられる．おのおのの素磁石は必ず正負の磁極をもっている．実際，任意の物質片の中にある磁荷の総量は $=0$ である．このことを，“自然界には磁荷は存在しない”ということを示すものであるとわれわれは理解すべきであろう．この問題は，エルステッドによる電流の磁気作用の発見によってはじめてその説明がもたらされた．この作用はビオ－サヴァールの法則により厳密に定量的に公式

化されたが，それはクーロンの法則と同様に，二つの簡単な近接作用的な法則をわれわれにあたえた．いま s は電流の密度，$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さを示すベクトルとすれば，この二つの法則は

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{s}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \tag{60}$$

である．この第二の式は磁場には源が存在しないことを示す．(60) は (51) のちょうど，相手役ともいえるもので，div と rot がいれかわっている．ベクトル解析におけるこの二つの演算は，ベクトル代数におけるベクトルどうしのスカラー積およびベクトル積にそれぞれ相当する（すなわち微分をひとつの記号的なベクトルと考えればスカラー積は div に，ベクトル積は rot に相当する）．電流の分布があらかじめ与えられているとき，無限遠で 0 となるような (60) の解は，(49) に対応して

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r}]}{r^3} dV \tag{61}$$

であることが容易にわかる．これはビオ‐サヴァールの法則にほかならない．この解はまた，ひとつの“ベクトル・ポテンシャル”$\boldsymbol{f}$ からつぎの式により導くことができる；

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}, \qquad 4\pi \boldsymbol{f} = \int \frac{\boldsymbol{s}}{r} dV.$$

最後に磁場による力の密度は (52) とまったく同じように

$$\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{s}, \boldsymbol{H}] \tag{62}$$

であたえられる．われわれが磁気について経験することがすべてこれらの法則に従っていることについては，なんら

疑問とすべきことはない．磁気は決して電気のくりかえしではない．むしろこれらは正確に互いに他のいわば伴侶である．ちょうどベクトルのベクトル積とスカラー積の関係に似た関係が磁気と電気のあいだに存在する．実際この対応に着目して，数学的に，ひとつの小さな円電流がこの円の中心に在って円を垂直に貫くひとつの小さな素磁石とまったく同じ作用をすることを証明できる．このような小円電流の磁気能率の大きさは電流の強さと円の面積の積に等しい．またその方向はこの円の平面の法線の方向に一致する．そこでアンペールに従って，磁化された物体の磁気的作用は物体内の分子電流に基づくものであると考えることができよう．電子論によればこの分子電流とは原子の内部で回転している電子の引きおこす電流にほかならない．

磁場による力 $\boldsymbol{p}$ もまた張力テンソルに還元させることができる．しかもそのテンソル成分は電場のそれとまったく同じ形をしていることがわかる．つまり電場に対するテンソルの $\boldsymbol{E}$ をすべて $\boldsymbol{H}$ でおきかえれば磁場の張力テンソルが得られる．その結果，場が持つポテンシャル・エネルギーの密度に磁場にもとづく項，$\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2$ を付け加える必要がある．このような手続きが正当なものであることは，時間的に変化する電磁場の場合を扱うとき，はじめてわかる．

(60) の第一式からは電流密度 $\boldsymbol{s}$ は湧点をもたないことがわかる：すなわち $\operatorname{div}\boldsymbol{s}=0$ である．したがって電流ベクトル場 $\boldsymbol{s}$ を多数の流管の集まりと考えるとき，これらの流管はどれもドーナッツ状に閉じた管であることになる．い

ま任意のひとつの流管をとり，その管の任意の場所における管の切口を単位時間に通過する電気量を考えるとき，それは切口の場所によらず，同じ管ではどこでも一定である．これらの電流が，その言葉の通り電気の流れであるということは，定常場の法則だけからは決して導き出すことはできない．しかし実際には，電気が流れていることは疑いもない事実である．この事実と $\operatorname{div} \boldsymbol{s}=0$ という法則から，電荷は新しく発生したり消滅することのできないものであることがわかる．任意の閉じた面を通して電流ベクトル $\boldsymbol{s}$ の流れ出る総量は常に 0 であるから，すべての点における電荷密度は時間的に不変である．——したがって定常場を扱うことになる——すなわち電荷の発生や消滅もない．——なお上にあたえたベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{f}$ もこの場合には，$\operatorname{div} \boldsymbol{f}=0$ を満足することがわかる．

$\boldsymbol{s}$ は電流として，疑いもなく，ベクトルという言葉の本来の意味において，ひとつのベクトルである．そこでビオ - サヴァールの法則から，**$\boldsymbol{H}$ はベクトルではなく，ひとつの 2 階線形テンソル**（つまり反対称共変テンソル）であることがわかる．そこでその成分を（任意の直交座標系またはアフィン座標系を基準として），H_{ik} と書くことにする．$\boldsymbol{f}$ もまたひとつのベクトルである．そこで $\boldsymbol{f}$ の共変成分を φ_i，また電流密度 $\boldsymbol{s}$ の反変成分を s^i（電流は，もともと速度と同様にひとつの反変ベクトルである）とすれば，つぎの一連の数式は定常電流による磁場の法則（空間の次元数に無関係な法則）を示す：

$$\frac{\partial H_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial H_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial H_{ik}}{\partial x^l}=0 \quad \text{または} \quad H_{ik}=\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \tag{63, I}$$

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k}=s^i. \tag{63, II}$$

また張力テンソルは

$$S_i^k=H_{ir}H^{kr}-\frac{1}{2}\delta_i^k\cdot|H|^2 \tag{63, III}$$

であたえられる．ここで $|H|$ は磁場の強さの大きさを示し

$$|H|^2=\frac{1}{2}H_{ik}\cdot H^{ik}$$

であたえられる．張力テンソルは対称である．なぜならば

$$H_{ir}H_k^r=H_i^r\cdot H_{kr}=g^{rs}H_{ir}H_{ks}.$$

力の密度の成分は

$$p_i=H_{ik}\cdot s^k. \tag{63, IV}$$

最後にエネルギー密度は，$\frac{1}{2}|H|^2$ である．

以上は真空内における磁場に対してなりたつ法則である．われわれは，電気のときと同様に，これらの法則を普遍的になりたつ厳密な自然法則と考える．しかしながら，物質内部の磁場に対しては，誘電分極に似た**磁化**の現象に注意しなければならない．ちょうど $\boldsymbol{E}$ のほかに $\boldsymbol{D}$ も考えたように，この場合には磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ のほかに“磁束密度”（Magnetinduktion）$\boldsymbol{B}$ が登場する．これらに対して場の法則は

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{s}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$$

となる．また $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係は

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{64}$$

物質定数 μ は透磁率とよばれる．さらに，$\boldsymbol{H}$ ではなく，$\boldsymbol{B}$ が微視的な磁場の強さの平均値に対応する．したがって磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は物理的には簡単な意味をもつ量である．一方，巨視的な磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$ という関係式によって，$\boldsymbol{B}$ と単位体積あたりの磁気能率 $\boldsymbol{M}$ から導かれる．物質内に在る電流の平均密度は二つの部分からなる．すなわち巨視的に観測される電流の密度 $\boldsymbol{s}$ に分子的円電流にもとづく項 rot $\boldsymbol{M}$ が付け加わる．この事情は双極子に基づく電荷に対して（59）が導かれたとまったく同じ考えにより証明される．すなわちひとつの体積素片 V の中にある双極子の電荷のかわりに，ここでは面積素片 F の縁 C により中心を貫かれた分子円電流を考えればよい．電気の場合には Ω で切断された双極子だけが V の中に含まれる電荷として 0 でない値をあたえた．同様に磁気の場合には面積素片 F の縁 C にからみついている分子円電流が F を通る電流として 0 でない値をあたえる．——しかしここで両者の重大なちがいに注意しなければならない．誘電分極の場合，個々の原子は外から働く電場の作用によってはじめて分極をおこす．しかもそこに発生した電気的双極子の向きは電場の向きと一致する．しかし磁化の場合はこれと異なる．すなわち原子はもともと自分の中にある電子の回転運動により，はじめからひとつの素磁石である．しかし原子がその配置を統制されないかぎり，また原子内の電子の円軌道のあら

ゆる位置が等しい頻度でおこっているかぎり素磁石の作用は互いに相殺される．そこで外部から物質に作用する磁場はただ，物質内で勝手な方向を向いている多くの原子磁石の向きをひとつのきまった方向にそろえる役目をすることになる．このような作業を磁場がどの程度になしとげることができるかは，もっぱら分子の熱運動の強さによる．この熱運動は常に分子をもとの無秩序の状態にかえそうとするものである．このことは物質の透磁率が温度に依存するという事実と密接な関係がある．したがって（64）が成立する領域は，これに似た関係式（58）のそれに比べてずっと狭い．特に永久磁石や強磁性体（鉄，ニッケル，コバルト等）は（64）に従わない．これ以外では電気と磁気の差異に関してここに述べたほどに大きいものはない．実際，**反磁性体**（diamagnetische Körper）では，誘電分極と同様に，外から作用する磁場が，もともと磁気能率をもっていなかった原子（つまりこの原子内における電子の回転運動による能率の総和が 0 のもの）を小磁石に変えることにより，この物体の磁化の大部分が実現される．また逆に誘電体の分極のさいにも，磁化の場合に似て，もともとあった電気的双極子や四重極（これらは外からの電場によって作られたのではなく，ただ電場によって特別な方向に向けられる）が電場により新たに発生した電気能率とともに，重要な役割をする例もある．

いままで述べてきたことのほかに，現象論的な理論ではさらに**オームの法則**：

$$s = \sigma E \qquad (\sigma = \text{伝導率})$$

がある．これは，電流がポテンシャルの勾配によっておこること，またある導体が与えられたとき，電流はポテンシャルの勾配に比例することを示す．原子論によれば，オームの法則は力学の基本法則からみちびかれる．すなわち力学の法則によれば，導体内の“自由電子”にはたらく電気力ならびに磁場による力が，電子の運動を引きおこす．その結果，電流が発生する．しかし運動する電子は導体内の分子と衝突するため，その速度はいつまでも増加するわけにはいかず，（重い物体が空気中を落下するときの空気の抵抗と同じように）電子はまもなく平均的なひとつの最終速度に到達する．この速度は第一近似では外部からの電気力 $\boldsymbol{E}$ に比例すると考えられる．このようにしてオームの法則がみちびかれる．

電流がひとつの電池または蓄電池によって作られるときは，電池の内部におこる化学変化によって導線の両端の間には常に一定の電位差が生まれる．これは“起電力”とよばれる．

定常場に対するマックスウェルの理論についていままで述べたことは，これから後のわれわれの議論にとっては十分である．個々の問題点や，具体的応用には，われわれは本書ではもちろんたちいらない．

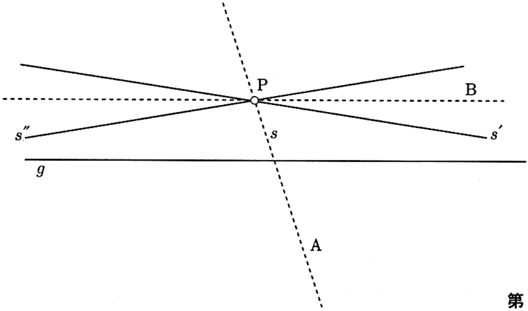
第II章　距離連続体

§10　非ユークリッド幾何学について [1]

ユークリッド幾何学に対する疑問は，ユークリッド幾何学自身と同じぐらい昔からあったもので，われわれの時代の哲学者の多くが考えるように，現代数学の超批判主義によってはじめて生まれてきたものではない．この疑問は昔からユークリッドの第5番目の公準に関連していた．その内容は本質的にはつぎのような主張である．ひとつの平面上に，1本の直線 g と，g の上にない1点Pがある．この場合Pを通り g と交わらない直線は必ずただ1本だけ存在する．この直線は g の平行線とよばれる．ユークリッドの他の公理は，そのまま自明なものとして認められたが，この第5公準については，既に大昔の解説者も他の公理を基礎としてこれを証明しようと努力した．今日ではわれわれはこの意図は決してなしとげることのできないものであることを知っている．むしろわれわれはこのような考えのなかに，“非ユークリッド幾何学”への第一歩を発見する．すなわちそれは，ユークリッドの公理系のなかで，平行線公理を除く他のすべてを承認し，それらを論理的基礎として，

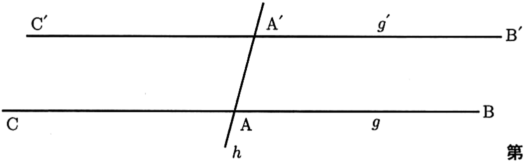
ひとつの新しい幾何学の体系を創ることへの第一歩とみなすべきである．実際，このような試みについてはプロクルス（A.D.5）の報告がある．プロクルスはこの報告のなかで，あることが“自明である”という前提のもとに，そのことがらを乱用することに対して強い警告をあたえている（われわれはこのような警告をくり返しなすべきである．しかし一方，“自明なこと”は実験的な知識も含めて，われわれのすべての知識の最終的なよりどころであることを強調するのに飽きてはならない）．さらにプロクルスは，同じ報告の中で，“漸近線”が存在することの可能性をも主張している．

これはつぎのようなものである．いまひとつの平面上にひとつの固定された直線 g と，g 上にないひとつの点 P があるとする．P を通る直線 s は P を中心として回転できるものとする．はじめには s は g に直交していたとする．s



第 2 図

を回転させると s と g の交点は g の上を（たとえば右の方に）移動する．そしてある瞬間にはこの交点は無限の遠方に逃げ去る．この位置における s を“漸近線”と呼ぶことにする．s が“漸近線”の位置にきた同じ瞬間に s と g の交点が左側の無限遠で出現するということが，ユークリッドの仮定である．これに対して，左側に新たに交点が出現するまでには，多分，われわれはある角だけ s をさらに回転させなければならないということもありうることを指摘したのがプロクルスである．この場合にはわれわれは 2 本の漸近線をもつことになる．その 1 本は交点が右の無限遠に去った極限であり，他は左に去った極限である．いま P を通る直線 s が s'' と s' の間（第 2 図の直線 PA の位置）にあるときは s は g と交わる．これに対して，もし s' と s'' の間（第 2 図の直線 PB の位置）にあれば，s は g と交わらない．——ところで平行線公理以外のユークリッドの公理系から“g を切らない直線が少なくとも 1 本は必ずある”ことが証明できる．これを証明するためにここで幾何学の初等教育でなじみの深い平面図形のひとつを思い起こそう．それは 1 本の直線 h，およびこれと点 A，A′ で交わっている 2 本の直線 g，g' からできている図形である．g，g' が h となす角は互いに等しいとする．g，g' はそれぞれ交点 A，A′ により左右に二分される．ところで g，g' は h の右側にある半直線上でひとつの点 S を共有すると仮定しよう．つまり h の右側で g と g' は交わるとし，その交点を S とする．第 3 図からわかるように，BAA′B′ は C′A′AC と合



第3図

同であるから，h の左側にもまたそのような交点 S^* があるはずである．しかしこれは不可能である．なんとなれば，2点 S，S^* を通る直線はただ1本にかぎるから．したがって g' は g と交わらない．

ユークリッドの仮定を証明しようとする試みは，アラビアや中世のヨーロッパの数学者によって進められた．近世にまで時代を移すならば，われわれは，非ユークリッド幾何学の最後の，最も偉大な先駆者，イエズス会の神父サッケーリ（18世紀はじめ）と，数学者ランベルト，およびルジャンドルの名をあげなければならない．サッケーリは，つぎのことを示した．すなわちユークリッドの平行線公理がなりたつか否かという問題は，三角形の内角の和が 180° に等しいか，それとも…… ＜180° であるかという問題と同等であることを示した．もしひとつの三角形において，その内角の和が ＝180° ならば，任意の三角形についても同じことがなりたつ．その結果，ユークリッド幾何学がなりたつ．しかしもしひとつの三角形の内角の和が ＜180° ならば，任意の三角形に対しても ＜180° となる．また内角の和が ＞180° となることはつぎの理由から，起こりえ

ない．その理由とは，定直線 g に対して，g の上にない定点Pを通る直線の中には少なくとも1本は g と交わらないものがあるということの証明の根拠になったことがらである．ランベルトは内角の和が $<180°$ という仮定のもとに，そのような幾何学にはひとつの特別な長さが存在することを発見した．この事実は，既にウォリスによって注意されたこと，すなわち非ユークリッド幾何学では（ひとつの球面上の幾何学と同様に），大きさは異なるが形がまったく相似な二つの図形は存在しえないということと，密接な関連がある．したがって，もしも大きさに無関係な“形”が存在するならば，そこではユークリッド幾何学がなりたつことになる．さらにランベルトは三角形の面積に対する公式を導いた．この公式によれば，非ユークリッド幾何学では三角形の面積はいくらでも大きくなるわけにはいかないことが示される．これらの人々の研究により，平行線公理は証明できるものではないという信念がより広い範囲にわたってその進むべき道をしだいに切り開いてくれたように思われる．その当時，この公理に対する疑問は多くの人の心を動かした．ダランベールは，この問題をなおいつまでも解決されない幾何学のひとつのスキャンダルであると称した．カントほどの大権威者でさえも，この疑問を結局は解決することができなかった．彼の哲学的組織にとっては，ユークリッド幾何学は，先験的な知識として，また空間という直観の内容を，適当な判断のもとに描き出したものとして必要なものであった．

ガウスもまたはじめには，平行線公理を証明しようと考えた．しかしまもなく，それが不可能であるという確信をもった．そこで彼は非ユークリッド幾何学（すなわち平行線公理が成立しない幾何学）の原理を展開し，ユークリッド幾何学と同様に，容易に非ユークリッド幾何学を建設できるまでにした．しかしこの研究について彼は何も公表しなかった．彼は，のちに一度，手紙に書いたように，愚かなる人々の悪評をおそれた．というのは当時この問題について何が本質的であるかを理解していた人はごくわずかしかいなかったから．ガウスとは独立に，法律学の教授であったシュヴァイカルトは非ユークリッド幾何学の内容を完全に洞察した．このことは彼のガウスにあてた簡単なノートからも明らかである．彼は，ガウスと同じように，われわれのまわりにある現実の空間において，ユークリッド幾何学がなりたつことは決して自明でもなく，また確実でもないと思った．彼の甥タウリヌスは，彼によってこの問題に興味をもつようにしむけられたのであるが，この甥は叔父シュヴァイカルトとは反対に，ユークリッドの信奉者であった．しかしタウリヌスのつぎのような発見に対して，われわれはタウリヌスに感謝しなければならない．その発見とは，虚数 $\sqrt{-1}$ の半径をもつ球面上の球面三角法の公式である．それは実数で表わされ，またそれは第 5 公準以外のユークリッドの公理を満たす幾何学のひとつの体系を解析的に創り上げたことになる．

非ユークリッド幾何学の発見者として，またその創設者

としての名誉は，つぎの二人にわけ与えられるべきであろう．一人はロシア人でカザン大学の数学の教授であったニコライ・イワノウィッチ・ロバチェフスキー（1793-1856），もう一人はオーストリア陸軍の将校であったハンガリー人のヤーノス・ボーヤイ（1802-1860）である．両人とも1826年に彼等のアイデアをはっきりと把握した．両人の主論文は1830/31年にできあがった．この両人の論文は，彼等の発見をはじめて公表したもので，それはユークリッド幾何学のスタイルをまねて，新しい幾何学の基礎づけを提唱したものである．特にボーヤイの論文は非常に見透しのよいものである．彼は平行線公理がなりたつか否かについて何も仮定しないで，他の公理だけからできうるかぎり理論を展開した．そして彼の“絶対幾何学”の法則から，ユークリッドの第5公準に賛成するか反対するかに応じて，ユークリッド幾何学または非ユークリッド幾何学の定理が導かれることを示した．

以上のように新しい幾何学は創られたが，平行線公理がこの“絶対幾何学”において他の公理から導き出されるものか否かという本来の疑問については，ついになんら結論も出されなかった．すなわち非ユークリッド幾何学が自己矛盾をもたないということに対する証明は，その時点ではまだあたえられなかった．この証明は非ユークリッド幾何学のその後の発展から自然に生まれてきた．この証明への最も容易な道は，たいていそうであるように，もちろんはじめからわかっていたわけではない．それはクラインによ

り 1870 年，はじめて発見された．それは非ユークリッド幾何学に対するユークリッド的モデルを作るという考えにもとづいたものである [2]．いま平面に話を限ろう．ユークリッド的平面上に直交座標系 x, y を設け，その原点を中心とした半径 1 の円 U を考える．いま同次座標 (x_1, x_2, x_3) を

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

によって導入する（これにより点の位置は $x_1 : x_2 : x_3$ の比の値できめられる）．これを用いると円の方程式は

$$-(x_1)^2 - (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0.$$

この左辺の二次形式を $\Omega(x)$ であらわし，これに対応する対称双一次形式を $\Omega(x, x')$ としよう，今，任意の点 x をその写像点 x' につぎの一次式

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \qquad (\det |\alpha_{ik}| \neq 0)$$

によって対応させるとき，この対応を共線写像 (Kollineation) という．（アフィン写像は特別な共線写像のひとつである）．この写像は任意の直線を 1 対 1 に他の直線に移す．また一直線上の 4 個の点の複比[1]はこの写像に対してその値を変

---

1) 訳者注：一直線上に 4 個の点 A, B, C, D がこの順にならんでいるとき，射影幾何学では $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}}$ をこの 4 個の点の複比と呼ぶ．一般に射影幾何学では線分や直線には向きを定義して長さに正負をつける．上の直線の向きは A から D の方に向くとすれば，AB, AC は正，DB, DC は負である．さて本文の例では，A, B, C, D に対応するものは，第 4 図の B_2, A′, A, B_1 である．いま A, A′ の同次座標を x_i, x'_i とすれば，$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ の座標を

えない．これからわれわれは辞書を作ろう．この辞書によってユークリッド幾何学の概念はわれわれに不慣れな言葉，すなわち非ユークリッド的言葉に翻訳される．このなじみのない言葉をわれわれは“　”で示すことにする．さてこの辞書はただ三個の言葉からできている．

“点”はUの中の任意の点を意味する．

“直線”とは1本の直線で，Uの内部にある部分を意味する．

円U上の点をUの上に移す共線写像をつぎの二つに分ける．ひとつはUの回転の向きをかえないもの，他はこれを

$$B_1 : y_{1i} = \lambda_1 x_i + \lambda_1' x_i', \qquad B_2 : y_{2i} = \lambda_2 x_i + \lambda_2' x_i'$$

とおくことができる．λ, λ' は $\Omega(y_1)=0$，$\Omega(y_2)=0$ からその比がきまる．すなわち

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1'} = \frac{-\Omega(x,\ x') - \sqrt{\Omega^2(x,\ x') - \Omega(x)\cdot\Omega(x')}}{\Omega(x)}.$$

λ_2/λ_2' は上の式の $-\sqrt{\ }$ を $+\sqrt{\ }$ におきかえればよい．この結果から B_1，B_2 の直交座標（$X_{(1)}$，$Y_{(1)}$），（$X_{(2)}$，$Y_{(2)}$）は容易に求まる．したがって線分 B_2A の長さは，A の直交座標を（x，y）とすれば，

$$B_2A = \sqrt{(X_{(2)} - x)^2 + (Y_{(2)} - y)^2}$$

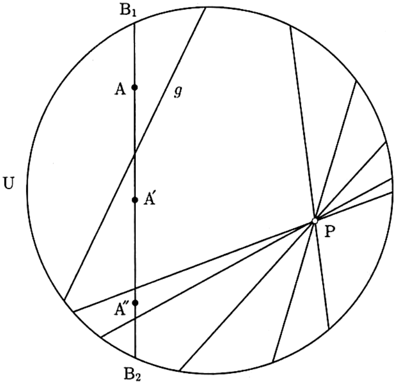
により与えられる．B_1A，B_2A'，B_1A' についても同様に計算できる．その結果，複比は

$$[AA'] = \frac{B_2A}{B_2A'}\cdot\frac{B_1A'}{B_1A} = \frac{\lambda_2'\lambda_1}{\lambda_2\lambda_1'}$$

$$= \frac{\Omega(x,\ x') + \sqrt{\Omega^2(x,\ x') - \Omega(x)\cdot\Omega(x')}}{\Omega(x,\ x') - \sqrt{\Omega^2(x,\ x') - \Omega(x)\cdot\Omega(x')}}$$

となる．さらに直線“B_2B_1”上の第3の点を A'' とするとき，$[AA']\cdot[A'A''] = [AA'']$ のなりたつこともすぐにわかる．

逆転させるものである．前者に属する共線写像を“合同写像”とよぶことにする．“点”からできている二つの図形の一方が“合同写像”で他方に重ねられるとき，この両図形は“合同”であるという．ここに述べた意味の“点”，“直線”，および“合同”の概念に対しては，平行線公理をのぞきユークリッドの公理はすべてなりたつ．第４図において“点”Ｐを通る“直線”のたばは“直線” g と交わらない．この事実から非ユークリッド幾何学が内部矛盾をもたないことが実証されたことになる．というのはこの例にでてきた事柄や関係は，それらに適当な名前をつけることによって，ユークリッド幾何学の公理をすべて満足することが示されたからである．ここに述べたクラインのモデルを３次元的な幾何学に移すことは容易にできる．



第４図

なおついでに，上に述べたモデルで 2 個の“点”の非ユークリッド的距離を定義してみよう．2“点”

$$\mathrm{A} = (x_1 : x_2 : x_3), \qquad \mathrm{A}' = (x_1' : x_2' : x_3')$$

によってきまる直線 AA′ は円 U と点 B_1，B_2 で交わる．これらの点の同次座標 y_i は，どちらも

$$y_i = \lambda x_i + \lambda' x_i'$$

の形をしているはずである．この未定のパラメーター λ，λ' は，y が円上の点ということから，$\Omega(y)=0$ によりきまる．すなわち

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{-\Omega(x,\ x') \pm \sqrt{\Omega^2(x,\ x') - \Omega(x)\cdot\Omega(x')}}{\Omega(x)}.$$

そこで 4 個の点 $\mathrm{AA'B_1B_2}$ の複比は次式であたえられる：

$$[\mathrm{AA'}] = \frac{\Omega(x,\ x') + \sqrt{\Omega^2(x,\ x') - \Omega(x)\cdot\Omega(x')}}{\Omega(x,\ x') - \sqrt{\Omega^2(x,\ x') - \Omega(x)\cdot\Omega(x')}}.$$

この量は任意の 2“点” A，A′ によってきまる量であるが，これは“合同写像”に際してその値を変えない．いま A，A′，A″ がひとつの“直線”上に第 4 図に示された順序で並んでいる 3 個の“点”とする．このときは

$$[\mathrm{AA''}] = [\mathrm{AA'}]\cdot[\mathrm{A'A''}]$$

がなりたつことがわかる．そこで

$$\frac{1}{2}\log[\mathrm{AA'}] = \overline{\mathrm{AA'}} = r$$

という量は

$$\overline{\mathrm{AA'}} + \overline{\mathrm{A'A''}} = \overline{\mathrm{AA''}}$$

という関係を満足する．ところでここに定義された量 $\overline{\mathrm{AA'}}$

は“合同”な線分 AA′ に対しては同じ値をもつから，2 点 A，A′ の非ユークリッド的距離は $\overline{AA'}$ であると定義することができる．ここで log が自然対数を示すものとすれば，ランベルトも指摘したように，われわれはひとつの長さの単位を絶対的に決定したことになる．$\overline{AA'}$ の定義はまた次のようにも書きかえることができる：

$$\cosh r = \frac{\Omega(x,\ x')}{\sqrt{\Omega(x)\cdot\Omega(x')}} \tag{1}$$

ここに述べたような長さの定義は，ひとつの実または虚の円錐 $\Omega(x)=0$ の切口を基礎にしてクラインより以前に既に，ケーリーによって“射影的長さの定義”として与えられた [3]．しかし実の円錐の切口に対する上述のような長さの定義が，非ユークリッド幾何学に導くことを初めて発見したのはクラインである．

ここで非ユークリッド的平面は有限であることをクラインのモデルは示しているのだと思いちがいしてはならない．むしろ，非ユークリッド的に長さをはかることによって，ひとつの“直線”の上に同じ長さの線分をつぎつぎに無限個ならべることができる．しかしこれをユークリッド的モデルと考えて，ユークリッド的に長さをはかれば，これらの“同じ長さ”の線分のユークリッド的長さは，はしにゆくほど小さくなる．非ユークリッド的平面では境界の円 U は到達できない無限の“遠方”にある．

虚の円錐の切口に対するケーリーの長さの定義は，普通の球的幾何学をあたえる．それはユークリッド空間内の球

面上でもなりたつものである．球の大円は直線の役をはたす．しかしその際，各直径の両端にある2点はただ1個の“点”とみなさなければならない．こうすれば，2本の“直線”はただ1“点”で交わる．さて球面上のひとつの点，例えば北極点における球の接平面上に，すべての球面上の点を，中心からその点を通る直線によって投影することにしよう．こうすれば同一直径の両端にある2点は，投影面上では同一の点となる．さらに，射影幾何学の場合と同様に，球の赤道の射影として，この平面上の無限遠に直線があると考えねばならない．またもとの球面上にある2個の図形がユークリッドの意味で互いに合同のとき，これらの平面上における射影は“合同”であるという．この新しい“合同”概念を用いることによりこの射影平面上でひとつの非ユークリッド幾何学が生まれる．この幾何学は第5公準をのぞいてはユークリッドの公理をすべて満足している．第5公準のかわりに，この幾何学では任意の2本の直線は例外なしに必ず，互いに交わる．また三角形の内角の和は$>180°$ということがなりたつ．後者は前にのべたユークリッド的証明による結論，すなわち内角の和は$\leqq 180°$という結論と矛盾しているように思われる．この矛盾はつぎのことを思いおこせば，解消される．すなわちここに考えている“球的”幾何学では，直線はすべて閉じているが，ユークリッド的な場合には，公理の中には書いてないが，暗黙のうちに，直線が開いたもの，すなわち直線上の任意の点によりそれが二つの半直線に分かれることが仮定され

ている．ただこの仮定のもとに，前の証明にでてきた直線の右側にあると想定された交点Sが左側にある交点 S^* とは別のものであるという結論が異論をはさむ余地のないものとなる．

さて空間（3次元）のなかに直交座標系 x_1, x_2, x_3 を設け，その原点を球の中心と一致させる．またこの x_3 軸は球の中心から北極に向かう線とする．また長さの単位には球の半径を使う．そこで球面上の任意の点の座標を x_1, x_2, x_3 とすれば，

$$\Omega(x) \equiv (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1.$$

北極点における接平面 $x_3 = 1$ の上へ，球面上の点 (x_1, x_2, x_3) を投影する時，平面上の第1，第2座標は，x_1/x_3，x_2/x_3 となる．したがって $(x_1 : x_2 : x_3)$ は，射影面上における（写像）点の同次座標といえる．球の合同写像は二次形式 $\Omega(x)$ を不変にする x の一次変換である．したがって射影面上における，われわれの“球的”幾何学すなわち非ユークリッド幾何学の意味における“合同”写像は，$\Omega(x) = 0$ をそれ自身に移すような同次座標 x_1, x_2, x_3 の一次変換であるといえる．ここで $\Omega(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0$ は虚の円錐の方程式といえる．以上により“球的”幾何学とケーリー的な長さの定義の関係についてのわれわれの主張が証明されたことになる．これと関連して，2点 A, A′ の間の距離 r は，いまの例では

$$\cos r = \frac{\Omega(x,\, x')}{\sqrt{\Omega(x) \cdot \Omega(x')}} \tag{2}$$

となる．なお非ユークリッド幾何学が半径 $\sqrt{-1}$ の球面上の球面幾何学と同等であるというタウリヌスの発見をも，われわれは以上のことにより，証明したことになる．なんとなれば半径 a の球面上のときは（2）の r は r/a におきかえねばならない．そこで $a=\sqrt{-1}$ とおけばこのようにかきかえた（2）は（1）と一致するから．（1）における Ω の符号と，（2）のそれとが異なることは本質的なことではない．すなわち半径が $\sqrt{-1}$ の球面上で，x_1, x_2 は虚数で，x_3 が実数である点を“実”の点と考えればよい．

ボーヤイ‐ロバチェフスキー型幾何学と“球的”幾何学のちょうど，中間にひとつの極限としてユークリッド幾何学がはさまれていると考えられる．いま実の円錐から出発して，これを変質させて虚の円錐に移せば，これに対応して，ケーリー的な長さの定義を与えられた平面上の幾何学は，ボーヤイ‐ロバチェフスキー型幾何学からユークリッド型を通過してついには“球的”幾何学になる．

§ 11　リーマン幾何学

非ユークリッド幾何学の考えのその後の発展のなかでわれわれにとって特に重要なものといえば，それはリーマンによる微分幾何学の基礎，特に曲面論との結合である．曲面論はガウスにより彼の Disquisitiones circa superficies curvas においてはじめて論ぜられたものである．

空間の最も根本的な特徴は，空間の点がひとつの 3 次元

多様体を形成するということである．この言葉をわれわれはなんと理解すべきであろうか？ たとえばわれわれは楕円の全体はひとつの 2 次元多様体を形成するという（楕円の大きさと形によって楕円を区別する．合同な楕円は同じものとみなし，合同でないものは別のものとして数える）．なんとなればこの集合に属する個々の楕円は 2 個の数，たとえば楕円の長，短軸の長さの半分によって指定されるから．また理想気体の平衡状態は 2 個の独立変数，圧力と温度で区別される．したがって平衡状態のすべてを考えれば，これも 2 次元多様体をなす．同様に球面上の点の集合，単純な音もそれを強さと音色により表現する時は 2 次元多様体となる．色彩もまたつぎに述べるような事情によりその性質と濃度により表わされるから 3 次元多様体を作るといえる．すなわち生理学の理論によれば，色彩感覚は網膜上における三つの化学的過程，すなわち白—黒，赤—緑，黄—青過程の組み合わせにより決定される．このどれもがそれぞれきまった方向に，きまった強度で網膜上におこる．しかし色彩の性質だけ（濃度をのぞく）に目をつけるならこれは 2 次元多様体となる．このことは有名なマックスウェルの色三角形が証明している．剛体の位置を指定するには 6 個の量が必要だから，それは 6 次元多様体を作る．n 個の自由度をもった力学系の配位は一般に n 次元多様体となる．**n 次元多様体の特徴は，これに属する個々の要素**（われわれの例では，図形上の個々の点とか，気体の状態，色，音，等々）**を，n 個の量，つまり“座標”**（これは多様体の

なかにおける連続関数といえる）を与えることによって規定できるということである．しかし，多様体の全体，つまりすべての要素が上述の方法で，1 対 1 に，連続的に n 個の座標の数値のひとつの体系によって表示される必要はない（$n=2$ の球面の場合，全球面上の点を上のような方法で表現することは不可能である）．いま P を多様体の任意のひとつの要素とすれば，P のある近傍については必ず，それに属するすべての要素を 1 対 1 で連続的に n 個の座標の数値の組と対応させることができる．いまある座標系を基準にしたとき，ある要素の n 個の座標を x^i，同じ要素を別の座標系からみたときの座標を x^{i*} とすれば，x^i と x^{i*} の間には一般に

$$x^i = f^i(x^{1*}, x^{2*}, \cdots, x^{n*}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (3)$$

のような関係がある．これを x^{i*} について逆に解くこともできる．また f^i は n 個の x^* の連続関数である．多様体について今まで述べたこと以上の知識がないかぎり，n-座標系 x^i はどれも同等で，それらの間に優劣の区別はない．それゆえ任意の連続多様体を解析的にとり扱うには，任意の座標変換（3）に対する不変性の理論が必要となる．一方前章ではアフィン幾何学を展開するのに，一次変換に対する不変性の理論をその基礎として使った．

直交座標系 x, y, z をもつ 3 次元ユークリッド空間内にある曲線や曲面の研究から微分幾何学が生まれた．ひとつの曲線は一般にはひとつの 1 次元多様体である．その上の個々の点はひとつのパラメーター u の値によって互いに区別さ

れる．いま曲線上の点 u が空間内の座標 $x,\ y,\ z$ をもつ位置に在るとする．この時，$x,\ y,\ z$ は u の連続関数となる：

$$x=x(u), \quad y=y(u), \quad z=z(u). \tag{4}$$

(4) を曲線のパラメーター表示と呼ぶ．もし u が時間を意味するならば，(4) はひとつの点の運動の法則を示す．この点は (4) であたえられる曲線を描いて運動する．パラメーター表示 (4) は，曲線があたえられていても，一意的にはきまらない．すなわち，われわれは u を，任意の連続変換によって他のパラメーターに変えることができる．

点の 2 次元多様体は**面**とよばれる．面上の点は 2 個のパラメーター u^1, u^2 の値によって識別される．したがってそれは

$$x=x(u^1, u^2), \quad y=y(u^1, u^2), \quad z=z(u^1, u^2) \tag{5}$$

という形のパラメーター表示であらわされる．ここでもあたえられた面をそのままにして，パラメーター u^1, u^2 を任意の連続変換により他の一対のパラメーターに変えることができる．ここで (5) にでてきた関数は u について連続であるばかりでなく，連続微分可能と仮定する．ガウスは彼の一般論において，任意の曲面を (5) の形に表現することから出発した．そこでパラメーター u^1, u^2 を曲面のガウス座標とか，曲面上の曲線座標と呼ぶ．例：前節のように半径 1 の球面上の点を球の中心（これは座標系の原点にとってある）から北極点における接平面 $z=1$ の上へ投影する．いま球面上の点の直角座標を $x,\ y,\ z$，またその点の投影点の投影面上における x, y 座標を u^1, u^2 とすれば，

$$x=\frac{u^1}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}},$$
$$y=\frac{u^2}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}},$$
$$z=\frac{1}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}} \tag{6}$$

が，球面のパラメーター表示である．しかしこれは球面全部を表現するものではなく，北極のある近傍だけを表現している．すなわちこれは赤道までの北半球面だけを表現している（ただし赤道はのぞく）．同様に北半球上のすべての点のパラメーター表示の他の例としてつぎのものがある．それは球面上の点を赤道面上に垂直に投影する方法である．球面上の点のガウス座標 x^1, x^2 としては，この点の投影点の x, y 座標自身を採用する．したがって

$$x=x^1,\quad y=x^2,\quad z=\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}. \tag{6'}$$

第三の例としては地理学的な座標，すなわち緯度，経度を用いる方法である．

熱力学では気体の状態をグラフで表現するのに直交座標軸をもったひとつの平面を用いる．すなわち圧力 p と温度 ϑ で気体の状態を表わすとき，p, ϑ を直交座標とする平面上の点を気体のひとつの状態に対応させる．曲面の場合にもこれと同じ方法を応用することができる．すなわち曲面上の点をあらわすのに，別にひとつの“写像平面”を用意し，またそこに直交座標系を設ける．曲面上の任意の 1 点のガウス座標を u^1, u^2 とするとき，この点に対して，写像平面

上の1点（これを写像点と呼び，その直交座標は u^1, u^2 である）を対応させる．このようにすれば (5) は単に曲面を表わすのみならず，同時にこれはまた曲面の u^1u^2-平面へのひとつの連続写像とも考えられる．曲面の一部を平面にこのように写像することは，実はわれわれの誰もがよく知っていることで，そのよい例は地図である．曲面上にあるひとつの曲線は数学的にはつぎのようなパラメーター表示で表わせる：

$$u^1 = u^1(t), \qquad u^2 = u^2(t). \tag{7}$$

また曲面の一部分は，変数 u^1, u^2 のひとつの“数学的領域”により表わされる．それは u^1, u^2 に対する不等式で表わされる．これらを u^1u^2-平面上の図形で示せば，曲線は u^1u^2-平面上の写像曲線により，また曲面の一部分は u^1u^2-平面上のひとつの写像領域により表わされる．いま写像平面すなわち u^1u^2-平面を，ミリメートルの方眼紙のように軸に平行な網目でおおえば，逆写像により，これは曲面上に，平行四辺形に似た小さな四角形からなる網目をつくる．この網目は $u^1 =$ 一定，$u^2 =$ 一定 のそれぞれに対応する2組の曲線群からつくられる．もしこの網目を十分に細かくすれば，写像平面上に任意にあたえられた図形をもとの曲面に逆に写すことが可能となる．

曲面上の互いに無限に接近した2点のガウス座標を

$$(u^1, u^2) \quad \text{および} \quad (u^1 + du^1, u^2 + du^2)$$

とすれば，これらの間の距離 ds は

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

からきまる．ここで

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x}{\partial u^2} du^2. \tag{8}$$

dy, dz についても似たような式がなりたつ．そこで ds^2 は du^i の二次形式となる：

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik} du^i du^k, \qquad (g_{ik} = g_{ki}). \tag{9}$$

ここで係数 g_{ik} は

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\partial x}{\partial u^k} + \frac{\partial y}{\partial u^i}\frac{\partial y}{\partial u^k} + \frac{\partial z}{\partial u^i}\frac{\partial z}{\partial u^k}$$

であたえられ，一般には u の関数である．たとえば球のパラメーター表示（6）の場合には，

$$ds^2 = \frac{\{1+(u^1)^2+(u^2)^2\}\{(du^1)^2+(du^2)^2\} - \{u^1 du^1 + u^2 du^2\}^2}{\{1+(u^1)^2+(u^2)^2\}^2}. \tag{10}$$

これに対して（6′）の場合には，まず球の方程式

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (z)^2 = 1$$

から，球面上の線分に対して

$$x^1 \cdot dx^1 + x^2 \cdot dx^2 + z \cdot dz = 0$$

がなりたつ．そこで ds^2 は

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dz)^2 \\ &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \frac{(x^1 \cdot dx^1 + x^2 \cdot dx^2)^2}{z^2}, \end{aligned}$$

つまり，

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \frac{(x^1 \cdot dx^1 + x^2 \cdot dx^2)^2}{1-(x^1)^2-(x^2)^2} \quad (10')$$

となる．ガウス座標系 u^1，u^2 からもうひとつの座標系 x^1，x^2 へ座標変換を行なえば，それに応じて ds^2 の形は（10）から（10′）に変わる．この座標変換 $(u^1, u^2) \to (x^1, x^2)$ は

$$x^1 = \frac{u^1}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}}, \quad x^2 = \frac{u^2}{\sqrt{1+(u^1)^2+(u^2)^2}}$$

であらわされる．この逆は

$$u^1 = \frac{x^1}{\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}}, \quad u^2 = \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}}$$

であたえられる．

距離の基本形式（あるいは計量基本形式ともいう）**が曲面上の幾何学を決定するひとつの重要な要素であることを**ガウスは知っていた．曲面上の曲線の長さ，角，また曲面上にあたえられた領域の大きさは，基本形式だけに依存する．それゆえ，もしパラメーター表示を適当に選ぶことによって，二つの曲面に対する距離の基本形式の係数 g_{ik} が互いに一致するときは，これら両曲面上の幾何学は同じものとなる．証明：曲面上に与えられた任意の曲線が（7）で表示されたとする．その長さは

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{i,k} g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}}\, dt$$

であたえられる．いまこの曲面上にひとつのきまった点 $\overset{0}{\mathrm{P}} = (\overset{0}{u}{}^1,\ \overset{0}{u}{}^2)$ をとる．この点のごく小さな近傍に対して，相対座標

$$u^i - \overset{0}{u}{}^i = du^i, \quad x - \overset{0}{x} = dx, \quad y - \overset{0}{y} = dy, \quad z - \overset{0}{z} = dz$$

を用いる．(8) にでてくる微係数として $\overset{0}{\mathrm{P}}$ における値を使っても，du^1, du^2 が小さければ，小さいほど，(8) はそれだけ正確になる．このことを (8) は“無限小の値” du^1, du^2 に対して成立するということにする．同様のことを dy, dz に対しても考慮すれば，(8)（ならびに dy, dz に対する同様な式）は $\overset{0}{\mathrm{P}}$ のごく小さな近傍で du^1, du^2 をアフィン座標とするひとつの平面の方程式と考えることができる[2)]．したがって $\overset{0}{\mathrm{P}}$ のすぐそばではアフィン幾何学の公式を応用してよい．そこで 2 個の線素あるいは 2 個の変位の成分をそれぞれ du^1, du^2 および $\delta u^1, \delta u^2$ とするとき，これらの間の角 θ は

---

2) ここでつぎの仮定をする．すなわちこれらの方程式の係数から作られる行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^1} & \dfrac{\partial y}{\partial u^1} & \dfrac{\partial z}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial z}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

の階数は 2 であることを仮定する．つまりこれから作られる 3 個の 2 次の行列式のなかでどれかひとつは少なくとも 0 でないものが存在すると仮定する．曲面上の点で，そこにおける曲面の接平面が存在するときは，そこではこの仮定は満足されている．曲面がひとつの曲線にちぢんでしまうという特別な場合にのみ，上述の 3 個の行列はすべて 0 となる．つまりこのようなときは x, y, z は 2 個のパラメーター u^1, u^2 の関数ではなくて，実際には 1 個のパラメーターの関数となる．つまり u^1, u^2 のひとつの関数 $v(u^1, u^2)$ の関数 $x(v)$, $y(v)$, $z(v)$ となる．

$$\cos\theta = \frac{Q(d,\delta)}{\sqrt{Q(d,d)\cdot Q(\delta,\delta)}}$$

であたえられる．ここで (9) に対応する双一次形式

$$\sum_{i,k} g_{ik} du^i \delta u^k$$

を $Q(d,\delta)$ で表わすことにした．またこれらの変位が作る無限小の平行四辺形の面積は,

$$\sqrt{g}\begin{vmatrix} du^1 & du^2 \\ \delta u^1 & \delta u^2 \end{vmatrix}$$

となる．ただし g は g_{ik} の行列式を示す．したがって曲面の面積は写像平面上での積分

$$\iint \sqrt{g} du^1 du^2$$

であたえられる．このように写像平面上の式にすべてを焼きなおせば，ガウスの主張の正しいことがわかる（証明おわり）．ここに導かれた各種の数式の値はパラメーターの選びかたには無関係である．パラメーターの任意の変換に対して値が不変であることは解析的に容易に証明できる．曲面上のすべての幾何学的関係は，写像平面上の写像によってそれを再現できる．すなわち写像平面上の互いにごく接近している 2 点の間の距離 ds をピタゴラスの定理にしたがって

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

としないで，このかわりに (9) を使うならば，写像平面上の幾何学は曲面上の幾何学と，完全に一致する．

曲面上の幾何学はその面上における長さの関係をとり扱うもので，この長さの定義は，この曲面が空間の中にどのようにはめこまれているかということには無関係である．すなわち曲面上における長さの関係は曲面自身の上で行なわれる測定によって決定されるものである．ガウスは彼の曲面論の研究を，まずハノーバー王国の陸地測量という実際的な作業からはじめた．地球の表面が決して平面ではないということは地球表面自身の十分に大きな部分の測定により明らかにされる．平面からのズレを無視してもよい程度に，三角測量の際の各三角形を十分に小さくとったとしても，これらをよせ集めてひとつの網目を作りあげる際に，それらが地球の表面上ではピッタリと継ぎ合わさるが，これを平面上で継ぎ合わせてもうまくゆかない．この事情をもう少しわかりやすく説明するために，半径１の球（これが地球に相当する）の表面上に，ひとつの円 $\boldsymbol{k}$ をえがく．その中心Ｐは球面上にある．その半径は，円周 $\boldsymbol{k}$ の上の点とＰとを通る球の大円の円弧である．それは $<\pi/2$ である．さて球面上における測定だけでわれわれはつぎのことをたしかめることができる：半径は，Ｐと $\boldsymbol{k}$ 上の点を結ぶ種々の曲線のなかで最短距離をあたえる曲線である．半径はその方向によらず，すべて等しい長さ r をもつ．いま閉じた曲線，つまり円 $\boldsymbol{k}$ の円周の長さを s とする．いま仮に円が平面上の円の場合を考えると，半径は大円の円弧ではなくて直線となり，また円周 s は $s=2\pi r$ でなければならない．これに反して，球面上の円では s が $2\pi r$ より小さ

く，$s=2\pi\cdot\sin r$ である．そこで球面上の測定のみにより，つまり s と r の関係をしらべることにより地球の表面が平面でないことをたしかめることができる．これに反して，いま一枚の紙の上にある図形をかいて，この紙を円筒状にまるめたとしよう．まるめることによって紙に歪みを引きおこすようなことをしなければ，円筒上の図形を測定しても，その値は，紙を円筒状にまるめる以前の，つまり平面上の図形の値となにも変わらない．つまりこの円筒表面の幾何学はもとの平面上のそれと正確に同じものである．つまりこの場合には測量だけでは面がまがっていることをたしかめることはできない．そこで一般に二つの曲面が与えられたとき，歪みをおこさないように変形することによって一方を他方にかさねることができるときは，この両面上でなりたつ幾何学は全く同じものであるといえる．

平面上の幾何学が球面上ではなりたたないことを解析的に示せばつぎのようになる：微分二次形式（10）を，パラメーターの上手な変換 $u^i\to u^{i*}$：

$$\begin{cases} u^1=u^1(u^{1*},\ u^{2*}) \\ u^2=u^2(u^{1*},\ u^{2*}) \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} u^{1*}=u^{1*}(u^1,\ u^2) \\ u^{2*}=u^{2*}(u^1,\ u^2) \end{cases}$$

によって

$$(du^{1*})^2+(du^{2*})^2$$

の形に書きなおすことは不可能である．任意の 1 点では，微小量 du^i の一次変換

$$du^{i*}=\alpha_1^i du^1+\alpha_2^i du^2 \qquad (i=1,2) \tag{11}$$

によって，その点の無限小近傍で（10）を上のような簡単な形に書きかえることができることは知っている．しかし任意の点で du^{1*}, du^{2*} に対する数式（11）が全微分の形になるように u^{i*} をえらぶことは不可能である．

曲線座標は単に曲面論ばかりでなく3次元空間における問題の取り扱いにも応用される．特に数理物理学では，あたえられた物体にあわせて座標系を選ぶことが必要になる．円柱座標，球座標，楕円座標はこの例である．空間内で互いにごく近接している2点の間の距離の2乗 ds^2 は任意の座標 x^1, x^2, x^3 を用いて，常につぎのような微分二次形式

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} dx^i dx^k \qquad (12)$$

であらわされる．ここでもしユークリッド幾何学がなりたつとするなら，それは座標交換によって（12）を，定数係数をもつ二次形式に変形できることを意味する．

以上のような準備のもとに，われわれはリーマンの考えかたを完全に把握することができる．リーマンの考えは，彼の教授就任講演“幾何学の根底に在る仮説について”[4]の中に完全な形で展開されている．第I章に述べたことから判るように，4次元ユークリッド空間の中にあるひとつの3次元的線形点集合の上ではユークリッド幾何学が成立する．しかし曲った3次元空間もまた，4次元ユークリッド空間の中に同じように存在することができるが（この事情は，3次元ユークリッド空間の中に曲った面が存在しうるのと同様である），この曲った空間は上述の線形点集合

とは別種のものである．ところで，直観の様式としてのわれわれの3次元空間がこのような曲った空間であるということはありえないことであろうか？　もちろんありうる．われわれの空間は4次元ユークリッド空間の中にはめこまれているわけではない．しかしわれわれの空間内における長さのふるまいは，曲っていない（いわば“平坦”な）空間の中では起こりえないような性質のものであるかもしれない．ちょうど地球表面上での測量により地面が平坦でないことがわかったように，われわれの空間内での注意深い測量によって，この3次元空間が平坦でないことが証明されるかもしれない．——ただこの場合，つぎの諸条件はなりたつものと認める：空間は3次元多様体である．無限小の線素はその位置や方向に無関係にその大きさを互いに比較できる．またこの長さ，つまりごく近接している2点の間の距離の2乗は，任意の座標系 x^i を用いて微分二次形式（12）によってあたえられる．（この最後の仮定は一般に，事実上妥当なものと考えられる．なんとなれば，ひとつの座標系から他の任意の座標系へ変換を行なうとき，これは無限小の座標差 dx^i に対してひとつの線形変換をあたえる．その結果，微分二次形式は常にまた微分二次形式に移される）．しかし，座標系を適当にえらんで，その結果，基本形式の係数 g_{ik} がある領域にわたり定数となるようにさせることができるというようなことは要請しない．

ユークリッド幾何学からリーマン幾何学に移ることは根本において近接作用的物理学と同様の考えかたにもとづく

ものである．例えばわれわれは観察によってオームの法則を確立する．この法則は，電線を流れる電流がこの導線の始めとおわりの両端における電位差に比例することを教えてくれる．しかしわれわれは，普遍的に厳密になりたつ自然法則は上述のような長い電線に関連した測定結果の形で表現されるべきものではないと思う．むしろ厳密な普遍的自然法則は，上述のオームの法則をひとつの無限に短い導線の部分に適用することにより導かれる（その結果の正しいことは実測からもよみとることができる）．このようにして第I章，§９の $\boldsymbol{s}=\sigma\boldsymbol{E}$ という公式に到達する．これはマックスウェルの理論の基礎となった公式のひとつである．この微分型の法則から出発して，導線の内部では電流等がいたるところ一様であるという仮定のもとに数学的に積分型の法則が導かれる．後者は観測により直接にたしかめられる．幾何学でもまったく同様である：ユークリッド幾何学の基本的事実は“任意の２点の間の距離の２乗がこれらの点の相対座標の二次形式であたえられる”ということである（ピタゴラスの定理）．しかしもしわれわれがこの定理を厳密に常に成立するものとみなすならば，２点が互いに限りなく近づいた場合には，われわれは上の定理からリーマン幾何学に到達する．同時にこれによりわれわれは座標概念の正確な決定をしなくともよいことになる．なんとなれば，リーマン的に書きかえられたピタゴラスの定理は任意の座標変換に対して不変であるから．このことは，ユークリッド的遠隔幾何学からリーマンの近接幾何学への移行

が，物理学における遠隔作用的見かたから近接作用的物理学への移行にまさに対応していることを示すものである．リーマン幾何学は，連続の精神にしたがって書きかえられたユークリッド幾何学である．しかしリーマン幾何学はそのような書きかえによって同時に多くの一般的な性質を手にいれた．ユークリッドの遠隔幾何学は直線や平面の研究のために創られたもので，このような問題にはそれはたしかに適している．しかし微分幾何学に移るときは，リーマンの無限小の仮定を基礎にとることはきわめて自然な合理的なことである．この仮定により複雑な制限からのがれることができる．また無用な遠隔幾何学的考察にわずらわされないですむ．リーマン幾何学でも，ひとつの曲面は 2 次元多様体であるから，パラメーター表示 $x^i = x^i(u^1, u^2)$ によりあらわされる．それから導かれる微分

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^1} \cdot du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \cdot du^2$$

をリーマン空間の距離の基本形式（12）に代入すれば，この曲面上のごく接近した 2 点の間の距離の 2 乗に対する公式として，du^1, du^2 のひとつの微分二次形式が求まる（これはユークリッド空間内の曲面の場合と同様である）：基礎に考えた 3 次元リーマン空間の計量は，この空間内におかれた任意の曲面上の計量の中にその特性を表わす．またそれにより，この曲面はひとつの 2 次元リーマン空間となる．ユークリッド空間の場合には，その中に置かれる種々の曲面のもつ性質に比べて，もとの 3 次元空間は元来，多

くのより特殊な性質が仮定されている．例えば，平坦という特性がそれである．これに対してリーマン空間では，曲面と，それを包む空間の性質に関する上述のような違いが消滅するように，平坦というような特殊な制限を空間の性質から除外する．その結果，空間は，その内部に置かれる種々の曲面と同じように一般的な性質をもつものに拡張されている．——**世界を，その中の無限小領域におけるふるまいにより理解するという原理**は，近接作用的物理学にとっても，またリーマン幾何学にとっても，その認識論的原動力となっている．しかしこの原理はまた他の分野，特に複素関数論におけるリーマンの壮大なライフ・ワークの駆動力でもある．ユークリッド幾何学の特徴に対する研究の歴史の出発点となった第５公準の正否に対する疑問は，今日からみれば，ある程度，偶然的な発端であったように思われる．ユークリッド的な観点をのりこえるためにわれわれがぜひ手にいれなければならない真の知識は，リーマンによってはじめてわれわれの眼前にあきらかにされたと思う．

ここでわれわれは，ボーヤイ‐ロバチェフスキーの幾何学も，ユークリッド幾何学や球的幾何学（この幾何学も非ユークリッド幾何学のひとつのタイプであることを初めて示したのはリーマンである）と同じようにリーマン幾何学の特別な場合にすぎないことを示さねばならない．実際，もしわれわれがボーヤイ‐ロバチェフスキー型平面上の点の座標として，写像面上の直交座標 u^1，u^2 を用いるならば（これはクラインのモデルにおける座標の選びかたに相

当する)，互いにごく近接した2個の点の間の距離 ds に対して (1) から

$$-ds^2 = \frac{\{-1+(u^1)^2+(u^2)^2\}\{(du^1)^2+(du^2)^2\}-\{u^1\cdot du^1+u^2\cdot du^2\}^2}{\{-1+(u^1)^2+(u^2)^2\}^2} \tag{13}$$

となる[3)]．これを (10) とくらべれば再びタウリヌスの定理の正しいことがわかる．3次元非ユークリッド空間の距

3) 訳者注：点 x' は点 x と無限小量だけはなれているにすぎないから，

$x_i' = x_i + dx_i$ $(i=1, 2, 3)$ とおけば

$$\Omega(x') = \Omega(x)+2\Omega(x, dx)+\Omega(dx)$$

$$\Omega(x, x') = \Omega(x)+\Omega(x, dx).$$

また2点間の "距離" r もここでは無限小の距離 ds に書きかえるべきであろう．そこで本書上巻168ページの (1) の左辺は

$$\cosh(ds) = 1+\frac{1}{2!}(ds)^2.$$

ここの計算では無限小量の2次の量までにとどめ，それ以上は無視する．そこで (1) は

$$1+\frac{1}{2}(ds)^2$$

$$= \{\Omega(x)+\Omega(x, dx)\}\cdot\frac{1}{\Omega(x)}\cdot\left\{1+2\frac{\Omega(x, dx)}{\Omega(x)}+\frac{\Omega(dx)}{\Omega(x)}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1-\frac{1}{2}\frac{\Omega(dx)}{\Omega(x)}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\Omega(x, dx)}{\Omega(x)}\right\}^2.$$

ここで

$$u^1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad u^2 = \frac{x_1}{x_3}$$

だから，$x_3 = 1$ ととれば，$dx_1 = du^1$，$dx_2 = du^2$，$dx_3 = 0$，

離の基本形式も2次元の場合と全く同様に書きくだすことができる．

もしユークリッド空間の中に適当な曲面を考え，別に適当にえらんだ座標 u^1, u^2 を使って曲面上の隣接した2点の間の距離の基本形式を書いたとき，それが（13）の形になるならば，この曲面上ではボーヤイ‐ロバチェフスキーの幾何学がなりたっていることになる．そのような面を作ることは実際，可能である．その最も簡単な例は，Traktrix を回転することによりできる曲面である．Traktrix とは第5図に示された曲線で，それは尖点Sをもち，また1本の漸近線 AB をもつ．この曲線の幾何学的な特徴は，曲線上の任意の1点Pにおける接線が漸近線と交わる点をQとするとき，PQの長さが一定という性質である．この曲線を，その漸近線 AB を軸として回転させるとき，それにより生ずる回転曲面の上では非ユークリッド幾何学がなりたつ．

$$\Omega(x) = -(x_1)^2 - (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1 - (u^1)^2 - (u^2)^2,$$
$$\Omega(dx) = -(du^1)^2 - (du^2)^2$$

そこで

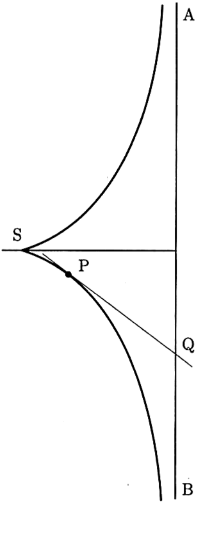
$$ds^2 = -\frac{-(du^1)^2 - (du^2)^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2} + \frac{\{-u^1\cdot du^1 - u^2\cdot du^2\}^2}{\{1-(u^1)^2-(u^2)^2\}^2},$$

あるいは

$$-ds^2 = \frac{-\{1-(u^1)^2-(u^2)^2\}\{(du^1)^2+(du^2)^2\} - \{u^1\cdot du^1 + u^2\cdot du^2\}^2}{\{1-(u^1)^2-(u^2)^2\}^2} \tag{13}$$

となる．

直観的にわかりやすいという点で非常にすぐれているこのようなユークリッド的モデルはベルトラミ［5］によってはじめてあたえられた．もちろん，このモデルにも不都合な点はある．まず第一に（このような直観的な形式をとろうとするならば），それは2次元幾何学にかぎられる．第二にここに述べた回転曲面（これは尖点Sからできた鋭い縁で常に二つの部分にわけられている）の二つの部分のそれぞれが非ユークリッド的平面のただ一部分を具体化して見せてくれるにすぎない．ロバチェフスキー型の平面の全体を具現する曲面，しかも特異点をまったくもたないような曲



第5図

面はユークリッド空間の中には存在しないことを厳密に証明したのはヒルベルトである [6]. 上に述べた二つの不都合な点はクラインの初等幾何学的なモデルには存在しない.

いままで述べたことは, ある意味で現実の空間とは関係のないまったく数学的な議論であった. しかし非ユークリッド幾何学が自己矛盾をもたないということと, **われわれを包むこの現実の空間においては非ユークリッド幾何学とユークリッド幾何学のいずれがなりたつか**という問題とはまったく別のことである. ガウスはこの問題をしらべるために, インゼルスベルク, ブロッケンおよびホーエル・ハーゲン（ゲッティンゲン近郊）を結ぶ三角形を注意深く測量した. しかし三角形の実測された内角の和の 180° からのズレは誤差の範囲内にとどまった. またロバチェフスキーは恒星のごくわずかな視差から, 現実の空間とユークリッド空間のちがいが驚くべきほどに小さいことを発見した. 一方哲学者の側ではユークリッド幾何学がなりたつか否かを実験的な観測によりたしかめることはできないという考えが強かった. 実際すべてのこのような観測では, 光線は直進する等々のような物理学的仮定が本質的な役割を演ずることを認めなければならない. われわれはここで, 幾何学と物理学の統一された全体系のみが自己の実験的検証をなしうるという以前に述べた注意が裏がきされていることに気づくであろう. そこで幾何学ばかりでなく物理学をも一方ではユークリッド空間の中で, また他方では一般のリーマン空間の中で組み立ててみた後にはじめて, どちら

が正しいかをきめる決定的な実験が可能となる．このことはきわめて簡単に，しかも完全に任意性なしに実施することができることがすぐにわかるであろう．たとえば電磁場の法則について，もしそれがユークリッド幾何学の前提のもとに公式化されているならば，その公式をリーマン空間の中における公式に移行させることは容易でかつ一意的に実施できる．このようなことがすべて実行されれば，特別なユークリッド的観点が正しいか，それとも一般的なリーマン的体系に移るべきかは，実験がはっきりと決定してくれる．しかしわれわれの現在の段階ではどちらがよいかに答えることができるまでには至っていないように思われる．

最後にもう一度，リーマン幾何学の基礎を，特別な次元数 $n=3$ とは無関係な，しかも完結した形式で述べておこう．

n 次元リーマン空間はひとつの n 次元の多様体である．それはひとつの正定符号の微分二次形式によって距離が定義されている．距離に対する基本形式から導かれる主要な定理はつぎのようなものである（x^i は任意の座標を示す）．

1．距離の基本形式の係数の行列式を g とすれば，ある空間の領域の大きさ（n 次元体積）は

$$\int\sqrt{g}dx^1\cdot dx^2\cdots dx^n \tag{14}$$

によりあたえられる．ただし上の積分はこの領域に対応する変数 x^i の数学的変域にわたって積分が行なわれるものとする．

2．任意の1点における二つの線素 d および δ に対して双一次形式 $Q(d,\delta)$ を作る．ただしこれは距離の基本形式に対応する対称双一次形式である．この $Q(d,\delta)$ を d と δ の“スカラー積”と呼ぶ．d と δ のはさむ角 θ は

$$\cos\theta = \frac{Q(d,\delta)}{\sqrt{Q(d,d)\cdot Q(\delta,\delta)}} \tag{15}$$

によりあたえられる．

3．n 次元空間 $\boldsymbol{R}$ の中にある m 次元多様体 $\boldsymbol{R}_m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ はつぎのようなパラメーター表示であたえられる：

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \cdots, u^m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

これにより $\boldsymbol{R}_m$ の中の任意の点 (u) は，$\boldsymbol{R}$ の中の点としての位置 (x) を教えてくれる．もとの空間の距離の基本形式から，m 次元多様体内の2点間の距離の基本形式が導かれる．それには微分の関係式

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}\cdot du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2}\cdot du^2 + \cdots + \frac{\partial x^i}{\partial u^m}\cdot du^m$$

を前者に代入すればよい．したがって $\boldsymbol{R}_m$ 自身もまた m 次元リーマン空間である．したがって $\boldsymbol{R}_m$ の一部分の体積を計算するには，$\boldsymbol{R}_m$ における（14）と同様の公式によればよい．たとえば $m=1$ の時は曲線の一部分の長さとなり，$m=2$ なら曲面の一部分の面積となる．

§ 12　平行移動と曲率

リーマン幾何学をさらに展開するためには，まずユーク

リッド空間の中にある曲面の理論に立ちもどるがよい．いまユークリッド空間内にあるひとつの曲面が，パラメーター表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1, x^2)$ であたえられたとする．ここで空間内に在る原点 O から面上の点 P に至るベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{r}$，またP のガウス座標が x^1, x^2 である．上にでた式は，これらの関係を示す．いま面上の任意の 1 点 P でこの曲面に接する接平面を作る．この平面は 2 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}, \qquad \boldsymbol{e}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}$$

で張られる．一般に P を基点とし P における接平面内にあるベクトルを P における**面ベクトル**（Flächenvektor）と呼ぶことにする．そこで任意の面ベクトル $\boldsymbol{x}$ は必ず一意的に

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{e}_1+\xi^2\boldsymbol{e}_2$$

の形に表わされる．ξ^1, ξ^2 はここに用いた座標系を基準にしたときの反変成分である．（接平面が設けられた）点 P のガウス座標 (x^1, x^2) があたえられれば，自動的に P における（2 次元）ベクトル空間（P における面ベクトルの全体はひとつの線形多様体をつくる）に対する座標系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ がきまる．面ベクトル $\boldsymbol{x}$ の共変成分 $\xi_i=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_i)$ と ξ^k の関係は

$$\xi_i=g_{ik}\xi^k$$

によってあたえられる．

さて $\mathrm{P}=(x^1, x^2)$ におけるひとつの面ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，P にごく近接した曲面上の点 $\mathrm{P}'=(x^1+dx^1, x^2+dx^2)$ まで，

空間内で $\boldsymbol{x}$ 自身に平行に移動させたとしよう．このようにすれば一般には移動されたベクトル $\boldsymbol{x}$ は P′ では，もはや曲面の接線にはならない．その場合，われわれはこの $\boldsymbol{x}$ を一意的に，$\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{x}_n$ のように分けることができる．$\bar{\boldsymbol{x}}$ は P′ で曲面に接し，$\boldsymbol{x}_n$ は曲面に垂直な無限小のベクトルである．そこでレヴィ＝チヴィタ [7] に従って，P における面ベクトル $\boldsymbol{x}$ を**曲面にそって平行移動**させた結果は P′ における面ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}$ であると定義する．この平行移動という概念の意味は特につぎの二つの事実にもとづく：

I.　**曲面にそって無限にわずかだけ平行移動をおこなうときは，ベクトルの長さも変わらないし，また二つのベクトルの間の角も不変にたもたれる．**したがって平行移動は P における（2 次元）ベクトル空間を P′ におけるそれへ合同に移動させることになる．なんとなれば面ベクトル $\boldsymbol{x}$ が，平行移動によりこうむる変化 $d\boldsymbol{x}$ は定義によれば曲面に垂直である．そこで P における二つの面ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のスカラー積に対して

$$d(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=(d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{y})=0.$$

II.　**平行移動は曲面上の距離の基本形式だけに関係する操作である．**このことから，P 点で，成分 ξ^i をもつ面ベクトルが，すぐ隣りの点 P′ まで曲面にそって平行移動されたとき，それがどのようなベクトルに変わるかは，曲面上の距離の基本形式だけにより決定されることになる．

証明　曲面上の点 P における任意のベクトルの接平面成分を文字の上に引いた横棒で示すことにする．この記号を

使えば曲面上の１点 P に在るひとつのベクトル $\boldsymbol{x}$ の無限小平行移動はつぎのように表わされる：1）$\boldsymbol{x}$ が面ベクトルの場合には不変である．2）$\overline{d\boldsymbol{x}}=0$．この 1）の特徴を利用するために，面ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}=\xi^i\boldsymbol{e}_i$ とかけば，2）から

$$\overline{d\boldsymbol{x}} = d\xi^i\boldsymbol{e}_i+\xi^i\overline{d\boldsymbol{e}_i} = 0. \tag{16}$$

ここで $d\xi^i$ は，$\mathrm{P}=(x^i)$ におけるベクトルの成分 ξ^i と，それを $\mathrm{P}'=(x^i+dx^i)$ まで平行に移動させた後のベクトルの成分 $(\xi^i+d\xi^i)$ の差である．また $d\boldsymbol{e}_i$ は，P, P′ における座標軸を示すベクトルの差である．いまガウス座標 x^i についての微分を下側につけた添字 i で示すことにすれば

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{r}_i, \quad d\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{r}_{ik}dx^k, \quad \overline{d\boldsymbol{e}_i} = \overline{\boldsymbol{r}_{ik}}dx^k$$

のように書きあらわされる．そこでいま

$$\overline{\boldsymbol{r}_{ik}} = \varGamma^1_{ik}\boldsymbol{r}_1+\varGamma^2_{ik}\boldsymbol{r}_2$$

とおけば（16）から

$$\boldsymbol{r}_i\cdot d\xi^i = -\xi^\alpha\cdot\overline{d\boldsymbol{e}_\alpha} = -\varGamma^i_{\alpha\beta}\cdot\xi^\alpha\cdot dx^\beta\cdot\boldsymbol{r}_i$$

つまり
$$d\xi^i = -\varGamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha\cdot dx^\beta \tag{17}$$

が導かれる．このようにしてわれわれは平行移動という操作をひとつの数式で書きあらわすことができる．この公式によれば，曲面にそって無限小平行移動を行なうとき，ベクトルの成分 ξ^i の変化量は，移動されるベクトル ξ^i ならびに，成分 dx^i をもった無限小変位のいずれにも線形（一次）に依存することがわかる．なおその比例係数 $\varGamma^i_{\alpha\beta}$ は

$$\varGamma^i_{\alpha\beta} = \varGamma^i_{\beta\alpha}$$

という対称性をもつ．

曲面上の１点Ｐにおける任意のベクトル $\boldsymbol{a}$（これは面ベクトルではない，一般のベクトルとする）の接平面成分

$$\bar{\boldsymbol{a}} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2$$

を知るのには，$\boldsymbol{a} - \bar{\boldsymbol{a}}$ が曲面に垂直であることを示せばよい．それは

$$(\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i) \qquad (i = 1, 2)$$

で表わされる．そこで a^i はつぎの式であたえられる：

$$g_{ij}\cdot a^j = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i).$$

この法則を特に $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$ に応用しよう．まず

$$(\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{r}_i) = (\boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{e}_i) = \Gamma_{i,\alpha\beta}$$

とおく．そこで

$$g_{ij}\Gamma^j_{\alpha\beta} = \Gamma_{i,\alpha\beta} \tag{18}$$

を得る．これは，(17) にでてきた係数 $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ を曲面の方程式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, x^2)$ からどのようにして計算で求めればよいかを教えるものである．Γ が実際 g_{ik} だけに依存することを示すために g_{ik} の定義

$$g_{ik} = (\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_k)$$

を x^l で微分しよう：

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = (\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_{kl}) + (\boldsymbol{r}_{il}\cdot\boldsymbol{r}_k) = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{k,il}. \tag{19}$$

ここで３個の添字 i, k, l を循環させて

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \Gamma_{k,li} + \Gamma_{l,ki},$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{l,ik} + \Gamma_{i,lk}.$$

この第一，第三式を辺々加え，第二式を引くと，右辺では

Γ の添字の対称性を考えにいれて

$$\Gamma_{i,kl}+\Gamma_{i,lk}=2\Gamma_{i,kl}$$

だけが残る．そこで

$$\Gamma_{i,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{20}$$

たいていの文献では，(20) で定義された量はクリストッフェルの記号 $\begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}$ で表わされている．また (18) によって導かれる量 Γ^i_{kl} は $\begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix}$ で表わされる．これらはクリストッフェルの三指標記号とよばれる．われわれは時たま，この括弧記号を使うこともあるが，一般には使わないことにする．というのは添字の位置について，この括弧記号はわれわれの約束を乱すものであるから．

なおここで平行移動に関して第三の特性を述べよう．

III. **曲面上の任意の点 P に対して，必ずつぎのような特別なひとつの座標系 (x^1, x^2) をもって P の近傍をおおうことができる．その座標系とは，それを基準にとれば，P 点における Γ^α_{ik} のすべての成分が 0 となるような座標系である．このような測地座標系**（とよばれる）では，P 点にある任意のベクトルを，この点のすぐ隣りにある点 P′ まで曲面にそって平行移動させるとき，ベクトルの成分は $d\xi^i=0$ を満足する．点 P における測地座標系を幾何学的な方法で，われわれはつぎのように最も簡単に設置することができる．まず曲面上の点 P で接平面 E を考える．曲面を E に垂直に E の上に投影する．P のある近傍に対しては，

曲面上の点とE上の射影点との対応は1対1である．E上でPを原点として直交座標系 x^1, x^2 を設ける．このようにすればE上の射影点の直交座標 x^1, x^2 はこれに対応する曲面上の点の座標の役目をする．このように定義された曲面上におけるPの近傍の曲面座標系が測地的性格をもっていることを示すために，この曲面をその内に包んでいる3次元空間に直交座標系を考えよう．ただしこの座標系はPを原点とし，その x^1, x^2 座標軸は上述の接平面E上の x^1, x^2 軸そのものとする．そこで曲面のパラメーター表示を

$$x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = z(x^1, x^2)$$

とする．そこで $\boldsymbol{r}_{ik} = \partial^2 \boldsymbol{r}/\partial x^i \cdot \partial x^k$ の成分は

$$x_{ik} = 0, \quad y_{ik} = 0, \quad z_{ik}$$

となる．この形からわかるように $\boldsymbol{r}_{ik}$ は点Pで曲面に垂直である．つまり $\bar{\boldsymbol{r}}_{ik} = 0$，したがって $\Gamma_{ik}^{\alpha} = 0$．——測地座標系をえらぶと，距離の基本形式の係数は点Pで定常値をもつことになる．なんとなれば（19）により $\Gamma_{ik}^{\alpha} = 0$ なら $\partial g_{ik}/\partial x^i$ も0となるから．

レヴィ＝チヴィタの定義によれば曲面内における平行移動が曲面上に設けられた座標系 (x^1, x^2) には無関係であることは明らかである．もともとの定義では座標系を直接には使っていない．しかし（17），（18），（20）に導いた計算では，座標系が使われた．そしてこの計算は平行移動という概念がただ曲面の計量にのみ依存し，その曲面が3次元ユークリッド空間のなかにどのように置かれているかには無関係であることを具体的にわれわれに示してくれた．

もしわれわれが平行移動を，曲面を包括しているユークリッド空間とは無関係に定義しようと考えるならば，われわれは背景にある空間を用いないで，逆に公式 (17)，(18)，(20) だけによって平行移動を定義すればよい．そのときは，この種の定義がそこに用いられた座標系 (x^1, x^2) に無関係であることを，つまりその定義が不変な意味をもつことを証明しなければならない．これは，少々面倒ではあるが，実際に，ひとつの座標系 (x^1, x^2) から他の任意の座標系への変換を計算することにより不変であることの証明ができる．しかし，思索とか直観のかわりにまったくの計算だけから導かれるこのような学問上の進歩は，明らかにあまり満足すべきものではない．しかし実際には，これらの数式の背後にはひとつのより簡単な，またきわめて自然な概念がひかえている．曲面を包括する背後の空間に無関係に，また特別な座標系を使用することもせずに，われわれは上述のような背後にある概念に到達しなければならない．しかしこれをする前に，まずわれわれは，**ベクトルの概念**自身を背後にある空間から解き放つ必要がある．

ここでつぎに述べるような事実を表現するためにひとつの幾何学的な補助概念を問題にしよう．その事実とは任意の連続な 2 次元多様体内の 1 点 P の無限小近傍は平面として取りあつかうことができること，ならびに，このような無限小近傍ではアフィン線形幾何学がなりたつということである．無限小量を，始終扱うのはいやだから，これから P における線素（Linienelement）をベクトルでおきかえ

る．この立場からみれば，問題にしている曲面や，その接平面がひとつの共通の3次元ユークリッド空間のなかに埋めこまれているということは本質的なことではない．また曲面と接平面が両者の接点Pから遠くはなれた空間内のどこかで再び交叉するか否か，その交叉する場所はどこかといったことは，われわれには全然，意味のない問題である．接平面はひとつの中心Oをもった，第I章の意味での2次元線形空間である．この中心Oは曲面との接点Pと同じものであり，接平面上のOの無限小近傍は，曲面上のPの無限小近傍と一致する．そこで，いま接平面を曲面からとりはずして，その傍においたと想像しよう．その際に，もともと曲面上の点Pと重なっていた接平面上の点（中心）Oの位置にしるし（接平面上に）をつける．さらにここで，両面の間の関係，つまり写像関係を設ける．この関係により，接平面上のOの無限小近傍は，曲面上のPの無限小近傍と完全に一致させられる．この写像はひとつのアフィン線形写像である．そこでわれわれは背景にある空間に無関係に，また曲面の次元数 $n=2$ にこだわらずに，つぎの定義に到達する．

あたえられた n 次元多様体の1点Pに属するベクトル体（ベクトル空間）とは，ひとつの n 次元線形ベクトル多様体（あるいは中心Oをもつひとつの n 次元線形空間）のことである．この線形空間の中心Oの無限小近傍は，ひとつのアフィン線形写像によってもとの多様体の点Pの無限小近傍に完全に一致する．ただしその時にはOはPと一

致する．この“一致の関係”をもとにして，もとの多様体の内部で点 P の近傍をおおう任意の座標系 x^i には，ベクトル空間内で，つぎのような性質をもった n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ からできている座標軸の組が対応する．その性質とは，多様体内の点 $\mathrm{P}=(x^i)$ から，そのすぐ隣りにある任意の点 $\mathrm{P}'=(x^i+dx^i)$ に向かう線素がベクトル空間内の無限小ベクトル $\sum_i dx^i\cdot\boldsymbol{e}_i$ に一致するという性質である．このことを簡単に“多様体内の座標系はベクトル空間内に，ひとつの座標系を誘致する”という．今までのべたことは，多様体がひとつのリーマン多様体としてきまった距離の定義をあたえられているということとは無関係である．P における計量，つまり距離の定義は，一意的にベクトル空間の上に移され，その結果，上述の点 P ならびに O のそれぞれの無限小近傍の間の一致関係はひとつの**合同写像**となる．すなわち P における距離の基本形式を $g_{ik}(dx)^i\cdot(dx)^k$ とすれば，ベクトル空間内にある任意の二つのベクトル（その成分を ξ^i, η^i とする）のスカラー積は $g_{ik}\xi^i\eta^k$ となる．

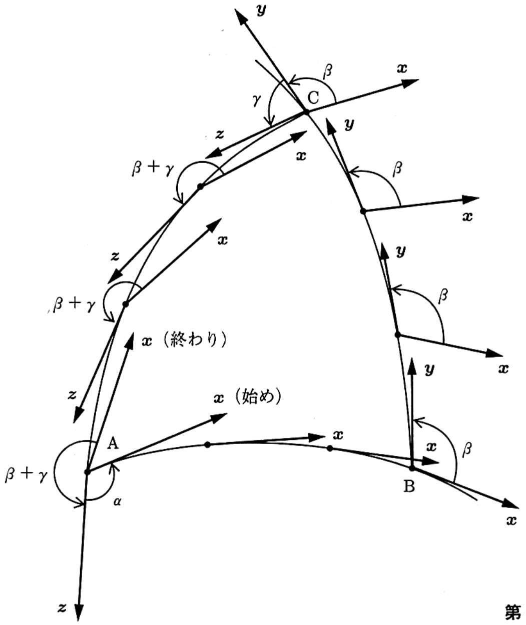
さて，ベクトルの無限小平行移動を背後の空間や，座標系に無関係に定義（この定義は形式的には（17），（19）であたえられる）するためにはまず，つぎのことを考えてみなければならない．1）平行移動により P に属するベクトル空間はあるきまった方法で，すぐ隣りの点 P′ に属するベクトル空間に移されることになろう．この移動が（17）の型をした数式により表わされるということの意味は一体なにか？（17）によれば，ひとつのベクトルの成分 ξ^i の平

行移動による変化 $d\xi^i$ は ξ^i 自身，ならびに変位のそれぞれと一次関係で結ばれており，その係数 $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ は α，β について対称である．2）係数 Γ が距離の基本形式の係数 g_{ik} と（19）の関係で結ばれているということは何を意味するのか？　これらの疑問に対する答はつぎの通りである [8]．1）に述べてあることは，前に述べた III の内容，つまり P 点においてひとつの測地座標系が存在するという事実を異なった形でいいあらわしたものにすぎない．2）は無限小平行移動に際してはベクトルの長さが変わらないことを述べているものである．ここに述べた答の証明は後に §15, §17 で正確にあたえられるであろう．そこで結局はつぎのようにすればよい．まずあるひとつの座標系が他のものに比べて，優れているとして特別扱いするべき理由を，本来，われわれは持ち合せない．そこで 1 点 P の近傍をおおう任意の座標系をひとつ設置する．P にごく近接した任意の点を P′ とするとき，P におけるベクトル空間を，P から P′ までつぎの規則にしたがって平行移動させる．すなわちこの移動に際して，上述の座標系を基準にした場合，各々のベクトルの成分は変化しないものとする．この定義にしたがえば，基礎にとる座標系ごとに，平行移動の定義もまた異なってくる．しかしもとの多様体が距離の定義を与えられたリーマン多様体であるとすれば，さらに，“平行移動ではベクトルの長さは不変である”という要請をおくことにより，さきに述べた無数にある異なった定義のなかからただひとつの定義（測地座標系に相当するものを用いた定義）

が選び出されることになる．私はこの長さが不変という事実を**無限小幾何学の基本的事項**と考える．以上のようにして到達できた平行移動に対する定義は，レヴィ＝チヴィタのもともとの定義にくらべて，この概念の原理的意味を一層明らかにしていると思う．なんとなればレヴィ＝チヴィタの定義は，曲面の埋めこまれているユークリッド空間の性質を利用しているから；われわれはここに至ってはじめて，平行移動に対するわれわれの概念がいかに自然なものであり，またそれが無限小の**"平行移動"**という名称にふさわしいものであるかがわかる．——ひとつの多様体が，その性質により無限小平行移動という操作を一意的に規定するとき，この多様体はアフィン接続多様体（または擬似接続多様体，affin zusammenhängende Mannigfaltigkeit）とよばれる．それゆえリーマン空間はひとつのアフィン接続多様体である．計量幾何学とは別に，アフィン幾何学を独立して創ることが，線形幾何学の場合に有効であったように，微分幾何学（無限小幾何学）でも，計量リーマン空間のような特別なものについて論ずるより前に，まず一般のアフィン接続多様体の一般論を考えるほうがよかろう．

無限小平行移動という概念には，同時に多くの幾何学的概念が結びついて誕生する；なかでも特に重要なものは**直線**（あるいは**測地線**ともいう）の概念である．直線とはその方向をかえない線のことである．すなわちある曲線の任意の点における接線をこの曲線にそって，その点からそのすぐ隣りの点へ平行移動により移した結果が，ちょうど後

者におけるその曲線の接線になっているとき，この曲線を直線とよぶ．一般に1点Pを起点とする任意の曲線にそって，点Pに在ったひとつのベクトルをつぎのように移動させることができる．すなわちこの曲線上で，ある点からすぐ隣りの点へ，上述のベクトルを無限小平行移動によって移す．これを曲線上の点についてつぎつぎに繰り返すことによって，Pにあったベクトルを，多様体内の他の任意の1点P* まで，PとP* を結ぶ**ひとつの曲線にそって**平行に移動させることができる．ここですぐつぎの疑問が生まれる：この移動は途中の曲線に無関係か？　いま同じベクトルをPからP* まで，二つの異なる曲線にそって平行に移動させたとする．その時，P* に到達したベクトルは，両方の場合をくらべてみて互いに等しいか？　この二つの質問は同じ内容の質問である．いまひとつのベクトルが，ひとつの閉曲線にそって無限小平行移動によりつぎつぎと移されていき，再び出発点まで立ちもどった時に，それは出発前のベクトルと一致するかどうか？　われわれは個々のベクトルのかわりに，またベクトル空間全体を考えることも可能である．すなわち多様体のなかを移動する点Pを考える．また点Pにおけるベクトル空間を$\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}}$とし，Pがある曲線をえがいて移動するとき，$\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}}$もこの曲線にそって，無限小平行移動により，つぎからつぎへ移動するものとする．したがって$\boldsymbol{T}_{\mathrm{P}}$はいわば羅針盤の針のようなものである．いまこの“羅針盤”が一周の航海をおえて再び出発点にもどったときに，その針はもとと同じ位置に帰



第 6 図

るか？　平行移動はベクトル空間に対するひとつの合同写像であるから，羅針盤の針の場所と位置について，その出発前の姿勢から，帰還後の姿勢を導くには，羅針盤にひとつの回転をほどこせばよいことは確かである．ここで，一般に羅針盤の針が閉じた曲線を一周して帰還したとき，それが出発前の位置にはもどらないという簡単な例をひとつあげてみよう．

3 次元ユークリッド空間内にある半径 a の球面上では，直線は球の大円に相当する．まずひとつの大円の円周上の 1 点 P における接線ベクトル $\boldsymbol{t}$（長さを 1 とする）を考える．同じ大円の円周上の各点における接線はすべて $\boldsymbol{t}$ を無限小平行移動によってつぎつぎと移したものであることを示そう．それには P のすぐ隣りの点における接線 $\boldsymbol{t}'$（長さは 1）と $\boldsymbol{t}$ の関係をしらべればよい．これらの差 $\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t}=d\boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{t}$ に垂直である．というのは，$(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t})=1$，$(\boldsymbol{t}'\cdot\boldsymbol{t}')=1$ だから $(\boldsymbol{t}\cdot d\boldsymbol{t})=0$ となるから．さらにこの $d\boldsymbol{t}$ は大円と同じ平面上にある．したがって $d\boldsymbol{t}$ は P 点における球の法線に重なる．そこで平行移動の定義を思いおこすとき，$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}'-d\boldsymbol{t}$ から，$\boldsymbol{t}$ を大円にそって球面上で無限小平行移動させると $\boldsymbol{t}'$ となることがわかる．このことから大円は球面上の直線，つまり測地線である．さて球面上に三つの大円でかこまれた三角形 ABC を考える（第 6 図参照）．いま羅針盤の中心が三角形のまわりを一周した後に，その針が出発前の位置にくらべてどれだけずれるか，すなわち針の出発前と，一周後の位置のはさむ角を求めてみよう．図 6 に示されているように α,β,γ は三角形の各頂点における外角を示す．さて，針の中心は始め点 A にあり，そのときの針をベクトル $\boldsymbol{x}$ で示す．これは辺 AB の方向を向いているものとする．$\boldsymbol{x}$ を A から B までこの辺にそって平行移動させるとき，AB は大円の一部だから，$\boldsymbol{x}$ は AB に接しながら B まで移動する．B に到達した時 $\boldsymbol{x}$ は辺 BC と角 β をなす．つぎに点 B において辺 BC の方向を向いた接線ベクトル $\boldsymbol{y}$ を補助に考

える．$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}$ 両者を大円 BC にそって平行移動させるとき，平行移動の定義から $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}$ の間の角は常に β であり，また $\boldsymbol{y}$ は常に大円 BC の接線として C まで移される．そこで $\boldsymbol{x}$ が C に到達したときは $\boldsymbol{x}$ と辺 CA との間の角は $\beta+\gamma$ となる．同様に $\boldsymbol{x}$ を C から A まで CA にそって平行移動させると，上と同じ推論により，帰還後の $\boldsymbol{x}$ と AB の間の角は

$$\alpha+\beta+\gamma, \quad \text{または} \quad (\alpha+\beta+\gamma)-2\pi$$

となる．つまり，帰還後のベクトルを A を中心として上記の角だけ回転させてはじめて出発前の位置にもどすことができる．回転角の正負は，ベクトルが三角形を一巡する向きを正とする．そこで逆に針をその始めの位置から終わりの位置にまで向きをかえるには A 点を中心として $2\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ だけ回転させなければならない．この角は三角形 ABC の面積を a^2 で割ったものに等しい．

一般に任意の曲面の上でつぎのことが成立する：ひとつの 2 次元リーマン多様体内に在るひとつの領域 G の周囲を羅針盤が一周して出発点まで帰還したとき，始めの針の位置から帰還後の位置までの回転角を $\Delta\omega(\mathrm{G})$ とするとき，それはつぎの関係を満足する．いま G が任意に 2 個の部分 G_1，G_2 に分割されたとすれば，

$$\Delta\omega(\mathrm{G}_1+\mathrm{G}_2)=\Delta\omega(\mathrm{G}_1)+\Delta\omega(\mathrm{G}_2).$$

この関係式から，ある適当な位置の関数 K を用いて $\Delta\omega(\mathrm{G})$ は

$$\Delta\omega(\mathrm{G})=\int K d\sigma \tag{21}$$

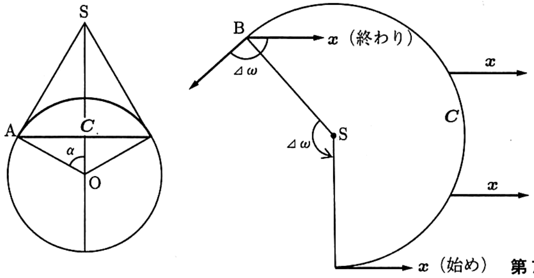
の形に表わされねばならないことがわかる．ここで $d\sigma$ は G の面積素片で，積分は G の全域にわたって行なわれる．いま G 内の 1 点 P をとり，そこに無限に小さい面積素片 $\Delta\sigma$ を考え，これを一周したとき，それにともなう針の無限小回転角を $\Delta\omega$ とすると P における K は，$K=\Delta\omega/\Delta\sigma$ であたえられる [9].（厳密には $\Delta\sigma\to 0$ に極限をとらねばならない．それにより $\Delta\sigma$ は点 P に収束する．ここで P における回転の正の向きをどうきめるかは問題でない．というのは，$\Delta\sigma$ を一周する向きと，回転角の正の向きを同一にとれば K の符号はきまるから）．この定義によれば“曲率”K は無限小平行移動を規定する係数 Γ^{r}_{ik}，つまりクリストッフェルの三指標記号を微分することにより求められる．§16 でわれわれはその計算をやってみせるであろう．距離の基本形式から作られる不変量——K は計量テンソル場から作られるひとつのスカラーである——をはじめて発見したのはガウスである．これを n 次元リーマン空間に拡張することは，今まで述べてきたことからわかるように，容易にできる．しかしその解析的表現は複雑である．というのは 3 次元あるいはそれ以上の多次元空間では，1）回転はもはやただ 1 個の角だけでは表わせない，また 2）1 点における面積素片といっても，それは無限に多数の異なった方向を向く面積素片が考えられるから．

上にあげた球面上の三角形の例では，半径 a の球面のガウス曲率 K は球面上のすべての点で $=\dfrac{1}{a^2}$ である．球面上のどの点でも曲率が一定でなければならないことは，球の

一様性のために，最初から明らかなことである．公式（21）によれば，球面上の任意の領域 G に対して，

$$\Delta\omega(\mathrm{G}) = \frac{1}{a^2} \times (\mathrm{G}\text{ の面積})$$

がなりたつ．この関係を，球面上の他の簡単な形でかこまれた部分に対しても確かめてみることは，多分よい練習になるであろう．例えば球面上で小円 $\boldsymbol{C}$ によりかこまれた部分について考えてみよう．この場合にはつぎのような直観的な考察ですぐに目的を達することができる．それにはまずひとつの円錐を考えよう．これは小円 $\boldsymbol{C}$ において球面と接しているとする（第 7 図の左図は円錐の頂点 S と球の中心 O を通る子午面で縦に輪切りにした切口を示したものである）．もし $\boldsymbol{C}$ にそって球面上をベクトル空間が平行に移動されるときは，あるいはむしろ円錐上を $\boldsymbol{C}$ にそって同じベクトル空間が平行に移動されたと考えるならば，レヴィ＝チヴィタの定義により，その結果は上と同じ関係式



第 7 図

を満足することがわかる．というのは，円錐面は，その面上の長さの定義を変えないまま，したがってまた，面上でのアフィン接続の性質を変えないまま，円錐面を平面の上にかさねることができる．それには円錐面を母線にそって切断し，それを平面上にひろげればよい．このようにひろげた場合，小円 $\boldsymbol{C}$，およびそれにそって平行移動されるベクトル $\boldsymbol{x}$ の様子は第7図の右図に示されている．平面内では $\boldsymbol{x}$ は平行に移動されてもその方向は変わらない．ところで平面上にひろげる以前の円錐を考えるならば第7図のBとAとは同一点である．そこで $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{C}$ にそって一周して，出発点に帰還したとき，それは出発前の方向にくらべて $\Delta\omega$ だけ回転している．それは次の式で与えられる：

$$\Delta\omega = 2\pi(1-\cos\alpha) = \frac{1}{a^2}\times\begin{pmatrix}\text{小円 } C \text{ でかこまれた}\\ \text{球面の部分の面積}\end{pmatrix}.$$

ガウスが彼の曲面論の中ではじめて曲率という概念を導いた方法や，その定義のしかたは，ここに今まで述べてきたものとは，いちじるしく異なっている．ガウスの方法は曲面の埋めこまれている3次元ユークリッド空間の性質に強く依存するものである．このことについては，曲面論の教科書を参照されたい [10]．一方リーマンによりあたえられた曲率の幾何学的意味，それは曲面上の長さの定義を駆使するもので，それについては前に述べた彼の教授就任の際の講演の中に述べられているが，彼の曲率に対する解釈は複雑でいささか不自然である．——われわれがここで扱ったことは，まずユークリッド空間のなかにある曲面の

理論から出発し，理論の発展の歴史をたどって，最終的には，曲面の埋めこまれている背後の空間に無関係に，リーマン多様体としての曲面の曲率という概念を導くことであった．ひとたびこのような概念が手にはいれば，個々の多様体（背後にある空間ではなく，曲面自身に相当するもの）の理論を基本的なものとして，理論の出発点におくことになる〔訳者注：曲面論が誕生した当時は，まず曲面の埋めこまれている背後の空間の性質が，理論の出発点であって，その性質を基礎として曲面の理論ができあがった．しかしそれ以後の理論の発展により，背後の空間は取り払われ，曲面自身が議論の出発点となるという意味である〕．したがってあたえられたユークリッド空間やリーマン空間の中に埋めこまれている次元数の低い空間の理論は，二義的な問題になる．この第二の問題，すなわち 2 個の多様体のうちの一方が他の中に埋めこまれている場合の研究はわれわれの当面の目的からみれば，わき道にそれている問題である [11]．

今まで説明してきたことからもわかるように，ユークリッド幾何学とは異なり，リーマン幾何学では，有限のへだたりをもつ 2 点におけるベクトル（の方向）を直接に比較することはできない．そのような比較をするのには，これらの 2 点を結ぶひとつの曲線にそって，一方のベクトルを順次，無限小平行移動により移していくという方法によらねばならない．しかしリーマン幾何学でもなお，離れた 2 点にある二つのベクトルの大きさを直接に比較することは

できる．これはリーマン幾何学の第一の根本仮定である．すなわち，これにより，同じまたは異なる場所にある二つの線素の大きさが測定（比較）できることになる．ここに明らかにひとつの矛盾がある．すなわち純粋の近接幾何学では，ベクトル自身（特にベクトルの方向）と同様に，その大きさに対しても，離れた場所における量を比較することは許されないはずである．そこではある点におけるひとつの長さをすぐその隣りの点（無限小の距離だけはなれた点）まで移すことだけがただ原理的に許されることである．したがって1点Pにおけるある長さを二つの異なる道をたどって有限の距離だけはなれた他の1点P* まで移すとき，P* におけるその長さは，通過して来た道によりその大きさが異なるものと考えねばならない．この意味で，リーマン幾何学は，純粋の無限小幾何学の考えを半分だけ実現したものであると私は思う．ユークリッド的な過去のまつわりついているこの最後の遠隔幾何学的要素をリーマン幾何学から取り除くことは是非ともやらねばならないことである [12]．ここでもうひとつ理論の拡張を考えねばならない．それは既に第I章でもふれたことである．すなわちリーマン幾何学の理論を空間と時間を一緒にした4次元世界に応用するためには，距離の基本形式が正定符号でない場合をも許さねばならない．しかし基本形式が縮退していないという仮定，またその正の次元と負の次元の数は4次元世界のすべての点で変わらないという仮定は，成立するものとする．この第二の仮定は基本形式の係数 g_{ik} の連続性と，

g_{ik} の行列式の値が決して0にならないということから導かれる.

§13 空間の一様性. 絶対的性質と物理学的性質

リーマン幾何学の構想については, その概説のなかですでに述べた通りであり, この幾何学が, 非常に美しいひとつの数学の理論であることについて, 疑いの余地はない. しかし, この理論が現実の空間においてなりたつものとわれわれは考えてよいであろうか? 現実の空間は現象の形式である. また, そうであれば, 必然的に空間は一様でなければならない. しかし一般のリーマン空間は, 決して一様な計量的構造をもつものではない. 一様な計量的構造をもつもの, すなわち一様な計量場をもつ空間は, 既に§10に述べた三種の幾何学のなりたつ空間にかぎる. つまりユークリッド幾何学, 球的幾何学, およびボーヤイ - ロバチェフスキー幾何学のなりたつ空間である. この疑問をもっと深く考えてみるために, 前節の最後に述べたリーマン幾何学に対する二つの拡張をしばらく度外視する. それゆえ, 正定符号の微分二次形式を距離の基本形式とする本来のリーマン幾何学について, また特に次元数 $n=2$ の場合に限ってまず議論をはじめよう. まず1点Pにおける計量の性質はすべての点に対して同じである. なんとなれば点Pがどの点であろうとも, われわれは適当な座標系を導入することにより, Pにおける距離の基本形式を $(dx^1)^2+(dx^2)^2$ の

形にすることが必ずできるから．まったく同様に，1 点 P とその無限小近傍に属する点に対して，そこにおけるアフィン接続の性質はすべての点 P に対して同じである．なんとなれば，P がどこにあろうとも，P の近傍で適当な座標系を設け，これを基準にしたとき，すべてのベクトル (ξ^i) に対して，それを P から，P のすぐ隣りの点まで平行に移動させたとき，$d\xi^i=0$ がなりたつようにさせることが必ずできるから．それゆえこの二つの性質に関して，多様体は元来，一様である．1 点における計量はその点における g_{ik} の値によりきまる．またその点におけるアフィン接続は g_{ik} の 1 階微分であらわされる．したがって空間の一様性とは，g_{ik} の 0 階，および 1 階微分係数の一様性を要求するものであるといえよう．しかし g_{ik} の 2 階またはそれ以上の高階微係数についての一様性を規定するものではない．曲率はアフィン接続の微分で表わされる量であるが，それは一般には曲面上で，場所ごとに，その値が変わるのが普通である．しかし多様体が計量的に一様であるとするならば，つまり多様体内の 1 点で計量に関してある性質が成立する時は，それと同じことが多様体内の他のすべての点でもなりたつべきであるとするならば，曲率は場所によらず一定値 λ でなければならない．しかし 2 次元リーマン多様体の曲率が定数 λ であるときは，この距離の基本形式は，適当な座標系 x^1, x^2 を選べば，つぎの形になることが証明できる：

$$\{(dx^1)^2+(dx^2)^2\}+\frac{\lambda(x^1\cdot dx^1+x^2\cdot dx^2)^2}{1-\lambda\{(x^1)^2+(x^2)^2\}}.$$

この結論は多次元空間の場合へ拡張できる．すなわち，いまこの空間内にひとつの曲面の部分を考える．羅針盤をその部分の周囲にそって一周させるとき，針の方向がこうむる回転の角はその面により規定される．面と針の回転角の間の関係をあたえる法則が面の位置や方向に無関係だとすれば，この n 次元リーマン多様体の距離の基本形式は，適当に座標系をとれば，つぎの形になる：

$$(dx,dx)+\frac{\lambda(x,\ dx)^2}{1-\lambda(x,\ x)}. \tag{22}$$

λ はある定数，また (x,y) は $x^1y^1+x^2y^2+\cdots+x^ny^n$ を示す．もし $\lambda=0$ ならユークリッド空間となる．また $\lambda>0$ は球的幾何学，$\lambda<0$ はボーヤイ型の幾何学をあたえる．上のような事情のもとでは，線素がそれのおかれた場所や方向に無関係な量であるとおなじように，任意の有限の大きさをもった図形についても，それの長さに関する関係を変えることなく，それをわれわれは任意の場所へ合同の性質をもったまま移すことができるし，また任意の向きにおくこともできる．§1 では空間に関するわれわれの考察は合同写像の概念から出発したが，以上のようにして，われわれはいま再び同じ概念にたちもどったわけである．基本形式 (22) をもつリーマン空間のすべての合同写像からなる群 $\boldsymbol{G}_\lambda$ がどんなものかは容易にわかる．それは (22) を不変にするすべての変換からできている群である．上述の

三つの可能な幾何学のなかで，特にユークリッド幾何学はつぎのことによって特徴づけられる．すなわち合同写像群のなかから§1にならべたような特性をもった並進群をとりだすことができるという特徴である．——上述の“一様性の法則”はリーマンの教授就任記念講演のなかで，既に彼が述べている．このことはまたベルトラミ，リプシッツ，シュール等によっても詳しく研究された [13].

ヘルムホルツは群論的な観点から“一様性の問題”を提起した [14]. 彼は無限小の領域でピタゴラスの定理が成立するとは仮定しなかった．彼は線素（Linienelement）の測定が可能であることすら一度も仮定しなかった．彼はもっぱら幾何学の真の基本概念，つまり空間の合同写像群 $\boldsymbol{G}$ にその議論を集中した．場所に対する一様性は，彼の考えでは，つぎのことで表現される．任意の点 P を他の任意にあたえられた 1 点 P* に移す写像が必ず群 $\boldsymbol{G}$ に属するということである．また 1 点 P を基点とするベクトルの方向についての一様性とは，点 P を不動にたもつ適当な合同写像により，P を基点とするひとつの方向を，同じく P を基点とする他の任意にあたえられた方向に移すことが必ずできるということを意味する．このような一様性に関する定義は，0 階の方向要素（Richtungselement）（これは点のこと）1 階の方向要素（これは線素のこと）ばかりでなく，さらに高階の方向要素（2 階は面を意味する）へ拡張できる．すなわちわれわれは，n 次元空間における一様性の要請をつぎのように公式化できる：群 $\boldsymbol{G}$ に属する写像により，0 階

から $(n-1)$ 階までの方向要素（Richtungselement）のひとつの組 Σ を，同じような他の任意の組 Σ' へ移すことが必ずできねばならない．その場合 $\boldsymbol{G}$ に属する写像のなかで，恒等写像とは方向要素の組 Σ を不変にする唯一の写像のことである．この条件を満足する唯一の群 $\boldsymbol{G}$ が実は $\boldsymbol{G}_\lambda$ であるという群論的に驚くべき事実がヘルムホルツにより，はじめて証明された．また同じことを，より厳密により一般的に証明したのは S. リーである [15]．これはまたつぎのようにもいえる：上に述べたような条件を満たす群は必然的に，ひとつのある正定符号の微分二次形式 ds^2 を不変にする．この ds^2 は適当に座標系をえらべば，(22) の形にかける．

いままで述べたことをふりかえると，リーマンの概念をも含めたすべての可能な幾何学の全体のなかで，基本形式 (22) によって定義される幾何学だけが，われわれの考察の対象となりうるものであり，他はすべて無意味なものとして，吟味もせずに棄て去られねばならないように見うけられる（その際，不定な定数 λ のために，$\lambda=0, +1, -1$, に応じて三つの完全に異なる幾何学がわれわれの考察の対象として残る）．さらに，ヘルムホルツの研究によれば，一般のリーマン幾何学により空間の考察をすすめることは，現実の事物の要求していない，いわばまわり道を進むことであるとさえいえる．リーマン自身はこの問題について別の考えをもっていた．彼はまったくちがった考えに基づいて，一様でない計量場をもった一般的な微分幾何学を考え

ついた．彼は，講演の結びの言葉として，この問題に対するひとつの解決策をあたえた．しかしそれは彼と同時代の人々には理解されず，彼の声はまるで聞こえなかったかのように消えてしまった（ただひとつのさびしい反響は W. K. クリッフォードの書いた物からかえってきたにすぎない）．その後，アインシュタインの重力論によってわれわれが目をさまされてから，今日はじめてわれわれは彼のいったことの背後に本来，何がかくされていたかに気がついたのである．リーマンの考えを理解するのに，前もって一言，注意を述べよう．彼は**連続的な多様体**のほかに，個々に孤立した要素の集合である**離散的多様体**をも考えた．このような離散的多様体では，その任意の一部分の“大きさ”（1次元なら長さ，2次元なら面積，……）はその部分の中に属している要素の**個数**によりあたえられる．したがって要素の個数という概念のおかげで，リーマンの言葉を借りれば，離散的多様体は“大きさ”の定義に対する原則を，先験的にあたえられているといえる．ここでリーマン自身の言葉を紹介しよう：

“無限小の領域で幾何学の根本仮定がなりたつかどうかという問題は，空間の‘大きさ’の定義に対する内的基礎の問題と結びついている．これらの問題はいずれも空間論に属すべきものであるが，これらに対して上に述べた注意は役にたつ．すなわち離散的多様体では，大きさの定義の基礎となる原理は，既に多様体の概念自身のなかに含まれているが，連続的多様体では大きさに対する定義を別に付け

加えなければならない．現実の空間はひとつの離散的多様体か，または連続的多様体のいずれかであるはずである．もし後者なら，それの大きさの定義の基礎を，**この多様体に作用している外的な一種の強制力**のなかに求めねばならない．”

“この問題に対する決着は，ただつぎのような過程のなかにのみ見つけだされる．すなわち，まずわれわれのまわりに起こる種々の現象（この上にニュートンは彼の理論の基礎をおいた）に対する正しい解釈（その正当性は従来からのわれわれの経験により与えられる）から出発し，さらにそれによっては説明できない多くの事実にあと押しされながら，漸次，この解釈を改良していくという過程である．ここに述べたような，一般的概念から出発する研究は，概念を制限することが研究を邪魔したり，あるいは旧来の偏見が，物事の間の関係の正しい理解をさまたげるようなことを防止するのに役だつ．”

“今日までは，この問題の決着のために他の科学にまで立ちいる必要があるとは思ってもみなかったが，それがいまや，数学の国境をこえて他の科学の領域，すなわち物理学の領域にまで立ちいることとなった．”

さて上に述べた第一の可能性，すなわち現実の空間はひとつの離散的多様体をなすという場合を無視することにしよう．——空間の問題に対する最終的な解答が多分この第一の可能性のなかに存在するであろうという考えを全然否定するつもりはない．特に今日，量子論を考慮すれば，な

おさら，この可能性を完全に否定することはむずかしい．しかしそれにもかかわらず，仮にこの第一の可能性を放棄することにしよう．——そのときはリーマンの考えによれば，その時まで常にわれわれの信条であったつぎのような考えを否定することになる．すなわち空間の計量は物理現象とは元来無関係にきめられているものであり，また空間は物理現象にとっていわば舞台の役目をするものである．この計量空間の中に実在する種々の物体は，あらかじめ用意された借家に人が住みこむように，距離の定義をあらかじめあたえられたこの空間の中にはいりこんでいるという考えである．**これに対してリーマンはむしろつぎのように主張した．空間はそれ自身としては形のきまらない3次元多様体にすぎない．空間のなかに在る物質的内容物によってはじめて，それは形をあたえられ，その大きさに関する関係が決定される．**そこで空間内にある物質が空間の構造をきめる法則とはどんなものかという問題が残る．いずれにしても，リーマンの考えによれば，距離の基本形式は時間の経過とともに変化する．このことは，物質が世界のなかで時間の経過とともにその様子を変えるのと同様である．もし物体により創られる計量場（これは距離の基本形式によって表現される）が，物体の運動に際して，それと一緒についてまわるならば，物体の大きさの関係を変えることなしに，その位置だけを変化させることが可能となる．いまこれに似た例として1枚のまがりやすいブリキ板を考えよう．それはあたえられた曲面の上に密着しているとする．

この場合，ブリキ板全体が常に曲面にくっついたままでブリキを動かすことは一般にはできない．しかしもし曲面が固定されたものではなく，曲面自身もブリキと一緒に動くことができるならば，ブリキは自由に動くことが可能になる．これとまったく同じことはわれわれの空間についてもいえる．ただしわれわれの場合には，上の例の曲面のかわりに計量空間をおきかえればよい．あるいはまたつぎのような例を想像することもできる．ある物体が自分自身のつくる重力場の影響のもとに平衡状態にあるとする．したがってその形も平衡の条件からひとつのきまった形におちついている．ところで仮に重力場の様子をそのままに固定して，物体内の質量の分布を変化させるとすれば，この物体が再び平衡状態をとりもどすためにはその形を変えねばならない．しかし実際には，物体自身が作る重力場も一緒に変化するので，この物体は十分に緩漫な運動にさいしては，その形をかえない．

リーマン空間では任意の１点Ｐにおいて，適当な座標系をとれば，距離の基本形式は，ユークリッド的なピタゴラスの形式

$$(dx^1)^2+(dx^2)^2+\cdots+(dx^n)^2$$

となる．すべての場所における計量が皆おなじ性質をもつということはこの事実を意味する．基本形式を上に示したような標準形にさせる座標系は，これから説明するように，計量の方向づけと密接な関係がある．異なる２点における計量はその性質については，上述のように同じであるが，

その方向づけについては同等でない．直交座標系をそなえた平面ユークリッド幾何学でも，これと似た言葉の使いかたがある．すなわち，すべての正方形は，適当な直交座標系 x, y を用いれば，必ず同じ不等式

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1 \tag{23}$$

によって表わされる．この意味ですべての正方形は同等である．しかし正方形の方向については一般に，正方形ごとに異なる．すなわち正方形を標準形式（23）によって表現できる座標系は，正方形ごとにそれぞれ異なったものである．ここに述べた計量の**性質**と**方向づけ**の間のちがいを利用して，われわれは空間に対する新しいリーマン的解釈を展開することができる．計量の**性質**とは，距離に着目したときの空間の先験的本質を特色づけるものである．この性質は**ひとつの**，したがってまた絶対的に定まったもので，例えば連続的な目盛りのなかに1点を選ぶ場合，その決定には必然的に不確実さ（誤差）がともなうものであるが，そのような宿命的な不確実さとはまったく無関係である．これに対して，異なった2個の点における計量の相対的な**方向づけ**は空間の本質からきまるものではなく，経験的に（いいかえれば，先験的にきめられているのではなく）偶然的に，それ自身，自由に，好むままに，仮想的変化をさせることができる．現実には計量の方向づけは物質と因果的に関連している．それは連続的に変化する量に宿命的な誤差（不確実さ）をともなうもので，合理的な方法では，決して正確に決定することはできない．また近似的に，さらに直

観的に，直接現実を参照するということによってのみ，その決定は可能となる．〔訳者注：ここに述べてあることを前にでた正方形の“性質”と“方向”を用いて説明してみよう．正方形が必ず（23）で表現されるという“性質”は正方形の本来の性質，つまりその本質である．経験的に，つまり実験によって，与えられた正方形がたまたま（23）の性質をもっていることが判ったというようなことはありえない．これに反して，正方形の方向はそれがどっちを向いているかは，正方形という性質からはでてこないものである．それは原理的には，どの方向でも好きなままに向くことができる．この意味で与えられた正方形がある特定の方向を向いていることはまったくの偶然といえる．またそれがその方向を向いていることは先験的にわかるものではなく，実験（経験）によってはじめて判明する．正方形の方向は，ある特別の方向を基準としたときそれに対して 0° から 360° までの連続領域の中の任意の角をとりうる．それゆえ，その方向を実験的にきめる際には，必然的に誤差（不確実さ）をともなう．ともかく与えられた正方形がどの方向をむいているかは，現実のものについて確かめてみる以外には方法がない．しかもその決定は近似的にしかできない〕．そこでリーマンの考えは，空間構造には先験的な要素が一切存在しえないというのではなく，先験的な要素もみとめるが，経験的，すなわち実験的に決定されるべき要素も存在し，これらの境界を従来より（経験的部分が増加する方向へ）ズラしたものであるといえよう．物理学者にと

っては，そこでつぎのような問題がうまれる．1）どのような法則のもとに計量場は物質に作用をおよぼすか？（このような作用はたしかに存在する．なんとなれば，計量場の様子を観測するのに，それの作用下にある剛体や光線の物理的ふるまいを利用する．その理由は，剛体や光線のふるまいが計量場により完全に規定されるからである）．2）物体を観測することによって明らかにされた現象が，上述の1）で確かめられた物体と計量場の相関関係にもとづいて，計量場自身も変化しうることを示しているか否かを確かめることが第2の問題である．もしそれが示しているときは，1）とは逆に物体が計量場の変化をどのように規定するかを示す自然法則を確立しなければならない．アインシュタインはこのプログラムになかみを盛りこむことによってリーマンの考えを勝利にみちびいた（もちろん直接にはリーマンから助けをかりることなしに）．：リーマンにもまさる，アインシュタインの新しい基本的な物理学的考えは，**計量場が変化しうることを重力という現象として表現する**ものである．アインシュタインの観点からふりかえってみると，いわゆる特殊相対性理論のやりかたにならって，時間を第4番目の座標として3次元空間につけ加えるならば，リーマンの考えかたから，はじめてひとつの有力な理論が誕生することがわかる．アインシュタインの特殊ならびに一般相対性理論については本書の第III，第IV章で述べる．ところで数学的な問題として，上述のリーマンの考えから，空間に関するひとつの新しい問題がうまれる．もし空間の

構造が唯一のもの，絶対的なものとするならば，われわれは現実の空間に固有なこの唯一の構造を，ある原理的な要請から合理的に理解することを研究すべきである．この問題については，誰でもがみとめるように，ヘルムホルツ－リーの定理がすでに解答を与えていると思う．すなわちこの定理の教えること以外には望むべきものは何も残されていない．しかしもしわれわれがリーマン－アインシュタインの立場にたつならば，計量場の量的な経過（ふるまい）を通して，空間の計量を把握することについては，もはや問題はない．ただ，計量がすべての場所でいつも同じピタゴラス型であるという**性質**に対しては，それがいかなる原理に基づくものかという上述の疑問は依然として残る．[空間の計量の本質に対する昔からの考えと結びついて生まれた] 空間の一様性に対するヘルムホルツの要請は，ここにおいて放棄されることになる．いまやそれはまったく新しい別種の要請によっておきかえられねばならない．ここに新たに生まれた空間の問題は著者により定式化されまた解決された．それについては，この章のおわりで報告しよう．

以上のように考えかたの基礎はできあがった．そこでいよいよ“純粋の無限小幾何学”の体系を創りあげる段階にきたわけである [16]．それは三つの階層からできあがっている．まずはじめは単なる**連続体**の厳密な定義から出発し，つづいて**アフィン接続された多様体**について論じ，最後に**距離空間**（計量空間）にいたる．われわれの思考上の偉大な発展は，以上のようにして創られた理論においてそ

のゴールに到達したものと私は思う．またそこに得られた成果は最終的な，もはや改修を要さない形にまで完成されていると思う．これこそ本物の幾何学であり，空間それ自身の規範である．それは単にユークリッド幾何学だけでなく，およそ幾何学という名前に関係した科学をすべて包含している．それは空間のなかに存在するすべての可能な形象の規範であるといえよう．ところで本書では，この幾何学の発展の歴史に併行して，テンソル解析の説明を順に展開していくことにしよう．

§ 14 任意の多様体におけるテンソルとテンソル密度

n 次元多様体 上に概説された手順にしたがって，まず空間は n 次元の連続体であるという仮定から出発する．それゆえ，それは n 個の座標 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ によって記述される．すなわち多様体の中の任意の 1 点には n 個のきまった数値の組が対応する．また異なる点には異なる数値の組が対応する．いま $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^n$ を第二の座標系とする．任意の点のそれぞれの系からみた座標を $(x), (\bar{x})$ とすれば，これらの間には関係

$$x^i = f^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (24)$$

が存在する．ここで関数 f^i に対しては，それが各 $\bar{x}$ に対して連続であるばかりでなく，連続な微係数

$$a^i_k = \frac{\partial f^i}{\partial \bar{x}^k}$$

も存在するものと仮定する．さらにこの α^i_k の行列式は 0 にはならないとする．最後の仮定は点 x の無限小領域でアフィン幾何学が成立すること，したがってまた，そこで dx^i と $d\bar{x}^i$ が可逆的に一次式

$$dx^i = \sum_k \alpha^i_k d\bar{x}^k \tag{25}$$

で結ばれるための必要十分条件である．それゆえ，ここに考えている多様体では直線と曲線を区別することはできない．しかし連続的な接線をもつ“なめらか”な曲線と，ワイエルシュトラスが考えたような“無限にちぢれた”曲線との区別はできる．多様体に対するわれわれの仮定の直観的意味はたとえばつぎのようなものである．すなわちこの多様体は単に連続であるばかりでなく“なめらか”（つまり無限にちぢれているようなことはない）なものであるといえよう．なおこれから議論を進めてゆく途中で必要とあれば，$f^i(\bar{x})$ に対して，より高階な微係数の存在や，その連続性をも仮定することになろう．いずれにしても場所のある関数が，連続とか連続微分可能，あるいは，$2, 3, \cdots$ 階の微分可能性といった概念は，座標系に無関係な，不変な意味をもつ．実は座標 x^i 自身も，このような場所の関数のひとつである．

テンソルの概念　1 点 $\mathrm{P} = (x^i)$ とこれにごく近接した第二の点 $\mathrm{P}' = (x^i + dx^i)$ の相対座標 dx^i は，点 P におけるひとつの線素（Linienelement），または，P の無限小変位

$\overrightarrow{PP'}$ の成分といわれる．第二の座標系に移るとき，この成分 dx^i に対しては（25）がなりたつ．ただし係数 α^i_k は点 P における値を用いなければならない．無限小変位は，これからテンソル算の理論を展開していくにあたって，第 I 章で述べた変位（並進）と同様な役目をはたす．しかし第 I 章と異なり，**ここで考える無限小変位は，変位をうける点と本質的に結びついていることに注意せねばならない**．たとえば 2 個の異なる場所にある点のそれぞれの無限小変位が等しいとか等しくないとかいうことはまったく意味のないことである．2 個の互いに離れた点の無限小変位の各成分がそれぞれ互いに等しいとき，この二つの変位は等しいと呼ぶことはもちろんできるであろう．しかし（25）の係数 α^i_k は定数でなく，場所によりその値が異なるから，たとえあるひとつの座標系で変位の各成分が等しかったとしても，他の座標系からみれば，もはや成分は等しくならない．それゆえわれわれはここではある 1 点の無限小変位のみが議論できるものであり，第 I 章のように全空間の変位について議論するのではない．その結果単にひとつのベクトルとかテンソルとかいっても意味をなさない．必ずある 1 点 P におけるベクトルとかテンソルといわねばならない．1 点 P におけるひとつのテンソルとは，P の座標（われわれは P 点の近傍にひとつの座標系を設けてあるとする）に依存する，多くの変数列のひとつの一次形式で，それはつぎのような性質のものである：いま簡単のために例を用いて説明しよう．ξ^i, η^i, ζ_k は 3 組の任意の変数列とし，これ

は座標系の変換 $(x) \to (\bar{x})$ に対して，つぎのように変換されるものとする：

$$\xi^i = \sum_k \alpha^i_k \bar{\xi}^k, \quad \eta^i = \sum_k \alpha^i_k \bar{\eta}^k, \quad \bar{\zeta}_k = \sum_i \alpha^i_k \zeta_i. \tag{26}$$

すなわち上側添字をもつ ξ^i，η^i は dx^i と共傾に，また下に添字のついた ζ_i は dx^i と反傾に変換されるものとする．また α^i_k は点 P における値をとるものとする．この時，ξ, η, ζ の三・一次形式が

$$\sum_{ijk} a^k_{ij} \xi^i \eta^j \zeta_k = \sum_{ijk} \bar{a}^k_{ij} \bar{\xi}^i \bar{\eta}^j \bar{\zeta}_k$$

を満足するとき，この三・一次形式を点 P におけるテンソルという．またこの係数 a^k_{ij} は座標系 (x) を基準としたときの点 P におけるテンソルの成分とよばれる．それは添字 i, j については共変，上の添字 k については反変である．テンソルの概念がここでもなりたつことは，(24) のような座標系の一般的な変換でも，無限小相対座標 dx^i の変換に着目すれば，それは (25) のような一次変換の形になるという事情にもとづく．ここでも無限小量の場合へ還元すれば，一般にどんな問題でも“線形化”することができるという，数学的にきわめて有効な考えかたが使用されている．同じ 1 点 P における種々のテンソルの間を結びつけるテンソル代数の法則に関するかぎりでは，第 I 章に述べたことは，完全にそのままここでもなりたつ．ここでも 1 階のテンソルをベクトルと呼ぼう．それには反変と共変の二種類がある．ただなにもことわらずにベクトルといったと

きは，それは反変ベクトルを意味するものと約束する．このことは本書上巻 201 ページに説明された幾何学的な解釈にもとづいたベクトルも，テンソル算についてここに述べられている一般的な概念の中に包括されているという事情に対応するものである．点 P における座標系に対応した幾何学的単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とする．P における任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ はこれらの一次結合で表わされる．すなわちその成分を ξ^i とすれば

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{e}_1+\xi^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\xi^n\boldsymbol{e}_n.$$

他の座標系 $\bar{x}$ の単位ベクトルを $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ とすれば，$\boldsymbol{e}_i$ と $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ の関係は

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i=\sum_k \alpha_i^k \boldsymbol{e}_k.$$

である．ひとつのテンソルの共変成分を反変成分に移すことについては，ここでは何も考える必要はない．任意の二つの（互いに線形独立な）線素の成分を $(dx)^i$，$(\delta x)^i$ とすれば，これらにより張られる面積素片の成分は

$$(dx)^i(\delta x)^k-(dx)^k(\delta x)^i=(\Delta x)^{ik}$$

となる．また 3 個の線素（互いに線形独立とする）からは 3 次元体積素片が作られる．任意の線素，面積素片あるいは体積素片等々の不変一次形式は“線形テンソル”（＝共変反対称テンソル，§7 参照）である．なおここでも以前に述べた和の記号 $\sum$ の省略の約束をそのまま利用することにする．

曲線の概念 いまひとつのパラメーター s の値ごとに点 $P=P(s)$ がきまり，しかも P は s に連続的に対応しているものとする．もし s が時間を意味するものとすれば，これは点の“運動”をあたえる．s がこのような意味を持たない純粋に数学的な問題の場合でも，他によい呼びかたがないから，“運動”という名前を使うことにする．ひとつのきまった座標系を用いれば，“運動”は

$$x^i = x^i(s) \tag{27}$$

で表現される．ここで $x^i(s)$ は n 個の s の連続関数である．これについてはさらに連続微分可能と仮定する．パラメーターを s から $s+ds$ まで移すと，これに応じて点 P は成分 dx^i をもった無限小変位をする．この無限小変位ベクトルを ds で割れば，点 P における“**速度**”が求められる．その成分は $u^i=\dfrac{dx^i}{ds}$ である．(27) はまた点が描く**軌道曲線**のパラメーター表示でもある．いまパラメーター s を，新しいパラメーター $\bar{s}$ に $s=\omega(\bar{s})$ によっておきかえるとき，二つの運動を示す (27) 型の方程式が互いに一致するときにかぎり，これら二つの運動は同じ曲線をえがく．ここで $\omega(\bar{s})$ は連続（でさらに連続な微係数をもつ）な単調関数とする．軌道曲線は各点における速度ベクトルの成分の比（これが曲線の方向を示す）によってきまり，各成分自身の値はどうでもよい．

テンソル解析 多様体内のある領域に属するすべての点において，それぞれの点に属するひとつの同じタイプのテ

ンソルが与えられているとき，この領域内に，当該のタイプのテンソル場が存在するという．ひとつの座標系を基準にとれば，このテンソル場の成分は，それぞれ“点”Ｐの座標のきまった関数として書きあらわされる．この関数は座標 x の，連続関数で，その上，連続な微係数をもつものと仮定する．第Ｉ章の§8で述べたテンソル解析を，ここで問題としているような任意の連続体の場合へそのまま適用するわけにはいかない．たとえば，テンソル微分について一般的操作を定義する際に，共変または反変の任意の補助的ベクトルを利用するが，第Ｉ章では，このベクトルが場所には関係しないものと仮定された．この仮定は線形変換に対してはなりたつが，本節で考えているような任意の座標変換に対しては不変な仮定ではない．なんとなれば変換の係数 α_k^i は x の関数であるから．その結果，任意の多様体では，これから証明するように，**ただ線形テンソル（反対称共変テンソル）に対してのみ以前に述べたテンソル解析が成立する．**まずスカラー場 f からはじめる．これを微分すれば，座標系のとりかたに無関係に，つぎの成分

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{28}$$

をもった１階共変テンソルができる．つぎに任意の１階線形テンソル f_i からは，２階の線形テンソル（２階反対称共変テンソル）が導かれる．その成分は

$$f_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k}. \tag{29}$$

さらに，任意の 2 階線形テンソル f_{ik} からは

$$f_{ikl} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} \tag{30}$$

という成分をもつ 3 階線形テンソルが作られる．以下 n 階線形テンソルまで同様に作ることができる．

いま φ は空間内で定義されたひとつのスカラー場とする．また x^i，$\bar{x}^i$ は任意の二つの座標系とする．これらそれぞれの座標系で，φ は x，ならびに $\bar{x}$ の関数として表現される：

$$\varphi = f(x^1, x^2, \cdots, x^n) = \bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^n).$$

いま x^i で示された点 P を無限小だけ変位させるとき，これに対応した φ の増加量を $d\varphi$ とすれば

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i.$$

この関係式から $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ はスカラー場 φ から微分により，座標系のとりかたに無関係に導かれたひとつの 1 階共変テンソルの成分であることがわかる．なおこれはベクトル場に対するひとつの簡単な例である．また上の例から，“grad” という演算は，単に一次座標変換ばかりでなく，任意の座標変換に対しても，不変な性質をもつ演算であることがわかる．

つぎに (29) を証明するためつぎのようなことをしよう．まず，点 $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{00}$ から成分 dx^i，および δx^i をもった 2 本の線素を引く．これらの線素の先端の点をそれぞれ，P_{10}，および P_{01} とする．つぎに線素 dx をなんでもよいが，あ

るきまった方法で，（dx の基点 P を）線素 δx にそって移動させ，それが最終的には $\overrightarrow{\mathrm{P}_{01}\mathrm{P}_{11}}$ というベクトルになったとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{00}\mathrm{P}_{10}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{P}_{01}\mathrm{P}_{11}}$ に移すこの移動を δ という記号で表示しよう．この移動により，$\overrightarrow{\mathrm{P}_{00}\mathrm{P}_{10}}$ の成分 dx^i は δdx^i だけ変化する．つまり

$$\delta dx^i = \{x^i(\mathrm{P}_{11}) - x^i(\mathrm{P}_{01})\} - \{x^i(\mathrm{P}_{10}) - x^i(\mathrm{P}_{00})\}$$

である．つぎに d と δ をいれかえてみよう．そのときは線素 δx は変位 d により，辺 $\mathrm{P}_{00}\mathrm{P}_{10}$ にそって，あるきまった規則にしたがって移される．その結果 δx は最終的には $\overrightarrow{\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}'_{11}}$ というベクトルになる．なお δx^i の変化は

$$d\delta x^i = \{x^i(\mathrm{P}'_{11}) - x^i(\mathrm{P}_{10})\} - \{x^i(\mathrm{P}_{01}) - x^i(\mathrm{P}_{00})\}$$

であたえられる．したがって

$$d\delta x^i - \delta dx^i = x^i(\mathrm{P}'_{11}) - x^i(\mathrm{P}_{11}). \tag{31}$$

そこで，2 点 P_{11} と P'_{11} とが一致するとき，つまり二つの線素 dx，δx は，それぞれの変移 δ，ならびに d に際して同じ無限小平行四辺形の上をなでて通るときにかぎり

$$d\delta x^i - \delta dx^i = 0 \tag{32}$$

がなりたつ．さて成分 f_i をもつひとつの共変ベクトル場が与えられたとする．そこで不変量 $df = f_i dx^i$ に移動 δ をほどこせば，df の変化量 δdf は

$$\delta df = \delta f_i \cdot dx^i + f_i \cdot \delta dx^i$$

となる．d と δ をいれかえて，両者の差を作ると

$$\Delta f = (d\delta - \delta d) f = (df_i \cdot \delta x^i - \delta f_i \cdot dx^i) + f_i(d\delta x^i - \delta dx^i).$$

ところで二つの変換 d と δ が同じ無限小平行四辺形を作るとすれば，そのときには特につぎのようになる：

$$\Delta f = df_i \delta x^i - \delta f_i \cdot dx^i = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k}\right) dx^i \delta x^k$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k}\right) \cdot (\Delta x)^{ik}. \tag{33}$$

もし上の計算のような無限小量を扱うやりかたが，あまりにも無茶で信じがたいと思うならば，微分を微係数におきかえればよい．またひとつの無限小面素片とは，十分に小さいが，しかし有限の大きさをもった面の一部分（正確には一部分の極限）を意味するものと考える．そのように考えれば上の議論は，以下に述べるように厳密なものとなる．いま 2 個のパラメーター s, t の 1 組の値に対して多様体のなかの 1 点 (s, t) がきまるものとする（ただしいま $s=0$，$t=0$ に相当する点のある近傍を問題にしているものとする）．ひとつの座標系 x^i を基準としたとき，関数 $x^i = x^i(s, t)$ は，ひとつの曲面の上にある“2 次元運動”を示す．ただし x^i は，s, t のそれぞれについて 2 階連続微分可能とする．そこで任意の点 (s, t) には 2 種の速度ベクトルが付属する．それらの成分は $\dfrac{dx^i}{ds}$，ならびに $\dfrac{dx^i}{dt}$ である．ここで $s=0$，$t=0$ の点はあたえられた点 $\mathrm{P}=(0, 0)$ を示すものとし，またこの点における 2 種の速度ベクトルの成分は，あたえられた速度，u^i ならびに v^i に一致するものとする（このことは x^i を s，t の一次式で書けば実現させることができる）．上に述べた移動 d は微分 $\dfrac{d}{ds}$ で，また δ は $\dfrac{d}{dt}$ でおきかえられる．そこで

$$df = f_i \frac{dx^i}{ds}, \qquad \delta df = \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} + f_i \frac{d^2 x^i}{dt\,ds}.$$

δ と d をいれかえて差をとれば

$$\Delta f = d\delta f - \delta df = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt}. \qquad (33')$$

ここで $s=0$，$t=0$ とおけば点 P における不変量

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^k} \right) u^i v^k$$

を得る．これは任意の二つのベクトル u，v に依存した不変量である．さきに述べた無限小量を扱った考えかたとの関係はつぎのような次第である．以前の無限小平行四辺形に対応して，ここでは $x^i = x^i(s,t)$ で表現された曲面が，$s=$ 一定，$t=$ 一定という 2 組の曲線群で格子状に分割されている．（証明終わり）

ここで私はストークスの定理を思い出す．無限小の不変量 $f_i dx^i$ を任意の閉曲線にそって一周積分したとき，その値が 0 となるとき，この不変量は**積分可能**といわれる．（$f_i dx^i$ があるひとつの量の全微分に等しいときにかぎり，積分可能となることはわれわれがよく知っていることである）．いまひとつの閉曲線をワクとする曲面がパラメーター表示 $x^i = x^i(s,t)$ で表わされているとする．それゆえ，この曲面は，座標線によって無限にこまかく格子状に分割されている．この曲面のワクを一周する積分は，上述の多数の小さな網目を一周する積分の和に還元される．この個々の網目の一周積分は（33′）に $ds\,dt$ をかけたものに等しい．こ

のようにして閉曲線にそった一周積分を，この閉曲線により縁どられた曲面上に分布した微小量の和に分割することができる．その場合テンソル（29）は面上の各点における“渦”の強さを示すものと考えられる．

まったく同様にしてわれわれはさらに高階のテンソル（30）に進むことができる．このときは無限小平行四辺形のかわりに，3 個の線素 $d, \delta, \mathfrak{d}$ によって張られる 3 次元平行六面体を用いねばならない．計算のやり方を簡単に示せば：

$$\mathfrak{d}(f_{ik}dx^i\delta x^k)$$
$$=\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l}dx^i\delta x^k\mathfrak{d}x^l+f_{ik}(\mathfrak{d}dx^i\delta x^k+dx^i\mathfrak{d}\delta x^k). \quad (34)$$

$f_{ki}=-f_{ik}$ だから，この第 2 項は

$$=f_{ik}(\mathfrak{d}dx^i\delta x^k-\mathfrak{d}\delta x^i dx^k) \quad (34')$$

となる．（34）の $d, \delta, \mathfrak{d}$ を輪換させて，それら 3 個の式を加えると（34′）からくる 6 個の項は，対称条件（32）により 2 個ずつ相殺して，結局

$$\mathfrak{d}(f_{ik}dx^i\delta x^k)+\delta(f_{ik}\mathfrak{d}x^i dx^k)+d(f_{ik}\delta x^i\mathfrak{d}x^k)$$
$$=\left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial f_{li}}{\partial x^k}\right)dx^i\delta x^k\mathfrak{d}x^l$$

となる〔訳者：左辺は不変量だから，右辺の（　）は 3 階共変テンソルの成分であることが証明された〕．

テンソル密度の概念　これから $dx^1dx^2\cdots dx^n$ を簡単に dx とかくことにして，積分 $\int\mathbf{W}dx$ がひとつの不変量とす

る．この場合には，$\boldsymbol{W}$ はつぎのような性質をもつ量である．いまある座標系から他の座標系へ座標変換を行なったとする．そのとき $\boldsymbol{W}$ は，それ自身に，変換の関数行列式（ヤコービの行列式）の絶対値をかけたものに移る．いまこの積分の値を，積分領域の全域を満たしている物質の全質量と考えるならば，$\boldsymbol{W}$ はまさにその質量密度である．そこで一般に $\boldsymbol{W}$ と同じ性質をもつ量を，**スカラー密度**と呼ぶ．これはひとつの重要な概念であり，スカラーの概念と同様に有用な，しかしスカラーとは別個の概念である．これと同様に，われわれはまた**テンソル密度**という概念についても論ずることができる．これを説明するのにつぎの例をあげよう．ξ^i, η^i, ζ_i は3個の任意の変数列で，これらは座標系 (x) から $(\bar{x})$ へ変換するさいに，(26) にしたがって変換されるものとする（ただし α_k^i は1点Pにおける値をとる）．いま ξ, η, ζ の三・一次形式

$$\sum_{ijk} \boldsymbol{a}_{ij}^k \xi^i \eta^j \zeta_k$$

が座標変換 $(x) \to (\bar{x})$ に際して，点Pにおけるスカラー密度と同じように変換されるとき，つまりそれは，それ自身の値に変換の関数行列式の絶対値

$$\varDelta = |\alpha_i^k| \text{ の絶対値}$$

の掛かったものに移る場合に，この三・一次形式を3階のテンソル密度と呼ぶ．成分，共変，反変，階数，対称，反対称，場等々の用語はテンソルの場合と同様に，テンソル密度に対しても使用される．テンソルとテンソル密度

をはっきりと区別したことによって，われわれは**密度量**（Quantität）と**強度量**（Intensität）の区別（このように区別することが物理的に意味がある場合に）を厳密に理解したと思う．すなわち**強度量はテンソルで，また密度量はテンソル密度で表現される**．テンソルのなかまのうちでは，共変反対称テンソル（すなわち線形テンソル）は特別な役目を演じた．これに対してテンソル密度の場合には反対称反変テンソル密度がこれと同様の役目をはたす．それ故これを**線形テンソル密度**と呼ぶ．

テンソル密度の代数　テンソルのときと同様に，テンソル密度に対してもつぎのような演算が可能である．

1．同種のテンソル密度の和，テンソル密度にひとつの数をかけること．

2．縮約

3．ひとつのテンソル密度とひとつのテンソルの掛け算（テンソル密度どうしの掛け算は考えない）．二つのスカラー密度どうしをかけても，その結果はスカラー密度にならない．これは，座標変換に際して，前に述べた行列式 Δ の 2 乗がかかったものに移される．これに反してひとつのテンソルと，ひとつのテンソル密度の積は常に再びひとつのテンソル密度（前二者の階数の和が，後者の階数に等しい）となる．たとえばひとつの反変ベクトル f^i と，成分 $\mathfrak{w}_{ik}$ をもつ共変テンソル密度（どちらも同じ点 P に属する量とする）からは座標系のとりかたには無関係に，常に 3 階の

テンソル密度がうまれる．その成分は $f^i \boldsymbol{w}_{kl}$ であたえられる．

テンソル密度の解析　任意の多様体におけるテンソル密度の解析学は線形テンソル密度（反対称反変テンソル密度）に対してだけ展開できる．すなわちまず以下のような div のタイプの演算が可能である：

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^i}{\partial x^i} = \boldsymbol{w} \tag{35}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^{ik}}{\partial x^k} = \boldsymbol{w}^i \tag{36}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot.$$

すなわちひとつの 1 階線形テンソル密度場 $\boldsymbol{w}^i$ から，(35) によって，ひとつのスカラー密度場 $\boldsymbol{w}$ が作られる．また 2 階の線形テンソル密度場 $\boldsymbol{w}^{ik}$ $(=-\boldsymbol{w}^{ki})$ から，(36) により 1 階の場が生まれる．これらの演算はすべて座標系のとりかたに無関係である．2 階の場 $\boldsymbol{w}^{ik}$ から (36) によって作られた 1 階の場 $\boldsymbol{w}^i$ を (35) に代入すれば，$\partial \boldsymbol{w}^i/\partial x^i = 0$ となる．同様のことはさらに高階の場合にもなりたつ．(35) の不変性の証明はつぎのことから導かれる．それは連続的にひろがった質量に関する理論として知られているものである．

いま ξ^i はひとつの与えられたベクトル場とする．

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t \tag{37}$$

は連続体内の点に無限小変位を与える．つまり座標 x^i をも

っていた点は，座標 $\bar{x}^i$ の位置に移される．無限小の定数 δt は時間を示すものと考えることができる．すなわち短い時間 δt の間に点が x^i から $\bar{x}^i$ まで移るものとする．この写像の行列式は

$$A = \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right| = 1 + \delta t \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}$$

である．いま連続体内の一部分を $\boldsymbol{G}$ とする．これは，座標 x^i を使って表わせば，変数 x^i のある数学的変域 $\boldsymbol{X}$ に相当する．この $\boldsymbol{G}$ は上述の無限小変位によって，$\boldsymbol{G}$ からわずかにズレた部分 $\overline{\boldsymbol{G}}$ に移される．いま $\boldsymbol{s}$ がひとつのスカラー密度場とする．これをわれわれは連続体内に分布している物質の密度とみなすことにする．$\boldsymbol{G}$ に含まれる物質の質量は

$$= \int_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{s}(x) dx$$

であたえられる．他方 $\overline{\boldsymbol{G}}$ 内にある物質の質量は

$$= \int \boldsymbol{s}(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{s}(\bar{x}) A dx$$

である．この最後（右）の積分の $\boldsymbol{s}$ の変数 $\bar{x}$ は（37）によって x で書きあらわされているものとする（ここでは物質はそのまま静止していて，ただ積分されるべき領域が変位をうけた．しかし逆に，変域をそのままにして，点 x にあった物質片が δt の間に $\bar{x}$ まで移動したと考えることもできる．その時は物質の流れの強さは $\boldsymbol{s}\xi^i$ で表わされる）．$\boldsymbol{G}$ が移動したことにより，$\boldsymbol{G}$ の中に含まれた物質の質量は変化する．その増加量は，

$$\boldsymbol{s}(\bar{x})A-\boldsymbol{s}(x)$$

を x について変域 $\boldsymbol{X}$ にわたって積分すれば求められる．この被積分関数は

$$\boldsymbol{s}(\bar{x})(A-1)+\{\boldsymbol{s}(\bar{x})-\boldsymbol{s}(x)\}$$
$$=\delta t\left\{\boldsymbol{s}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}+\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial x^i}\xi^i\right\}=\delta t\frac{\partial(\boldsymbol{s}\xi^i)}{\partial x^i}$$

のように書きかえられる．そこでつぎの公式が導かれる：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{s}\xi^i)}{\partial x^i}=\boldsymbol{w}.$$

これは $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{w}$，および成分 ξ^i をもつ反変ベクトルの間の不変な関係式を示す〔訳注：$\boldsymbol{s}(\bar{x})A-\boldsymbol{s}(x)$ を x について $\boldsymbol{X}$ の全域で積分すれば，これは $\boldsymbol{G}$ 内の質量の増加を示し，これは座標系のとりかたに無関係，つまり不変量である．したがってその被積分関数は定義によりスカラー密度である．これは δt に比例するからそれを $\delta t\boldsymbol{w}$ とおけば，上の公式となる〕．任意のベクトル密度 $\boldsymbol{w}^i$ は必ず $\boldsymbol{s}\xi^i$ の形に表わされるから――なんとなれば，ある**特定**な座標系で，ひとつのスカラー密度 $\boldsymbol{s}$，ならびにひとつのベクトル場を $\boldsymbol{s}=1$，$\xi^i=\boldsymbol{w}^i$ によって**定義**すれば，任意の座標系で $\boldsymbol{w}^i=\boldsymbol{s}\xi^i$ が成立する．――（35）は証明されたことになる．

ここで上に述べたことに関連して，後にしばしば使われる**部分積分の原理**について言及しよう：いまある領域 $\boldsymbol{G}$ の境界面上で，関数 $\boldsymbol{w}^i$ が 0 になるときは，

$$\int_G\frac{\partial\boldsymbol{w}^i}{\partial x^i}dx=0$$

となる．なんとなれば，この積分に δt をかけると，それは，“体積” $\int_G dx$ が変位をうけたために起きた $\boldsymbol{G}$ の中に含まれる物質の全質量の変化を示し，$\boldsymbol{w}^i\delta t$ は，変位の際の物質の流れの強さを示すベクトルと考えられる．

div の演算（35）が不変であるということが証明されたから，つぎはより高階の場合へ移ろう．まず（36）を考えよう．今ひとつの共変ベクトル f_i を補助に使う．これはひとつのポテンシャル f から $f_i=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ によって作られたものとする．これを使って 1 階線形テンソル密度（つまり反変ベクトル密度）$\boldsymbol{w}^{ik}f_i$ を作ると，その div は

$$\frac{\partial(\boldsymbol{w}^{ik}f_i)}{\partial x^k}=f_i\frac{\partial \boldsymbol{w}^{ik}}{\partial x^k}.$$

ところで f_i は 1 点 P で，任意の値をとりうるから，（35）を使えば，（36）は証明されたことになる．同様にして 3 階の場合へ進むことができる．

§ 15 アフィン接続多様体[4)]

アフィン接続の概念 多様体内の 1 点 P および，それにすぐ隣接した他の任意の 1 点 P′ を考えよう．いま P における任意のベクトルに対して，これを P から P′ まで**平行移動**させたとき，P′ のどのベクトルに移されるかが，確定しているとき，点 P は，その近傍と，アフィン的に接続さ

4) 訳者注：正確には“アフィン的に接続された多様体”というべきだが，上のように簡略にした．

れているという．ここに定義された概念は，第I章のアフィン幾何学においてあたえたすべての性質のいかなる部分をも制限するものではない．つまり第I章の性質はそのまま保存される．そこでわれわれはつぎのような要請をおく．**多様体内のPの近傍で適当な座標系を設け，それを基準にしたとき，Pにおける任意のベクトルの成分が，無限小平行移動に際して，不変となるように，ひとつの特別な座標系をえらぶことが必ずできる．**ベクトルを，変化しないようにそのまま移動させることが平行移動の本質であると主張しているのがこの要請である．上に述べた特別な座標系はPにおける**測地座標系**といわれる．もし任意の座標系 x^i を用いれば，上述の要請のなかに述べられたことはどうなるであろうか？　この任意の座標系を基準にしたときPおよびP′の座標をそれぞれ $\overset{0}{x}{}^i$，ならびに $\overset{0}{x}{}^i+dx^i$ とする．また ξ^i はPにおける任意のベクトルの成分とし，これが平行移動によってP′まで移されたとき，P′ではその成分が $\xi^i+d\xi^i$ になったとする．アフィン的に接続された多様体ではPからP′への平行移動によって，Pにおけるすべてのベクトルは，P′における対応するそれぞれのベクトルへアフィン写像（線形写像）されるから $d\xi^i$ は ξ^i と一次関係で結ばれるはずである：

$$d\xi^i = -d\gamma^i{}_r \cdot \xi^r. \tag{38}$$

なおまず第一に設けられた仮定，すなわち無限小変位という要請から $d\gamma^i{}_r$ は dx^i の一次式であらわされるはずである：

$$d\gamma^i{}_r = \Gamma^i_{rs} dx^s. \tag{38'}$$

この係数 Γ は“アフィン接続係数”とよばれ，対称条件

$$\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs} \tag{38''}$$

を満足する．

(38″) を証明するには P における測地座標系 $\bar{x}^i$ を設けよう．$\bar{x}, x$ との間には (24)，(25) がなりたつ．$\bar{x}$ が測地座標系であるために平行移動にさいして，$d\bar{\xi}^r = 0$ だから，

$$d\xi^i = d(\alpha^i_r \bar{\xi}^r) = d\alpha^i_r \cdot \bar{\xi}^r \tag{39}$$

が成立する．いま ξ^i として特に P における線素の成分 δx^i をとれば，(38) を用いて

$$-d\gamma^i{}_r \cdot \delta x^r = \frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{x}^s} \delta \bar{x}^r d\bar{x}^s$$

となる（f^i の 2 階微係数に対して P におけるその値を使用すべきことはもちろんである）．この結果から (38″) は導かれるし，また対称双一次形式

$$-\Gamma^i_{rs} \cdot \delta x^r dx^s = \frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{x}^s} \delta \bar{x}^r d\bar{x}^s \tag{40}$$

も決定される［ただし変換 (25) を用いる］．――以上が結論のすべてである．もう一度結論をまとめていえば；Γ^i_{rs} は点 P に対して任意に与えられた数値とする．ただしそれは対称条件 (38″) を満足するものである．これを用いて，(38)，(38′) によってアフィン接続を定義すれば，§ 12 の意味の平行移動に対するひとつの可能な概念を作りあげたことになる．いま座標変換 $x \to \bar{x}$ を

$$x^i - \overset{0}{x}{}^i = \bar{x}^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{rs}\bar{x}^r\bar{x}^s,$$

(Γ としては P における値を用いる)

によって定義すれば，$\bar{x}^i$ 座標系では上に定義された平行移動に対してベクトル $\bar{\xi}^i$ のこうむる変化 $d\bar{\xi}^i$ は確かに $=0$ となる．実際，点 P では

$$\bar{x}^i = 0,\ dx^i = d\bar{x}^i,\ \text{すなわち}\ \alpha^i_k = \delta^i_k,\ \frac{\partial^2 f^i}{\partial\bar{x}^r\partial\bar{x}^s} = -\Gamma^i_{rs}.$$

その結果，P では (40) が成立する．そこで議論を逆にもどしていけば，(39) すなわち $d\bar{\xi}^i = 0$ に到達する．なお §12 で述べたこと，すなわち (38)，(38′)，(38″) は測地座標系が存在するという主張と同等であるということは，以上述べたことにより証明されたことになる．

座標変換のさいに，アフィン接続（係数）の成分 Γ^i_{rs} がどのように変換されるかを示す公式は上述の議論から容易に導かれる．しかしこの公式は今後，本書では使用する機会はないから，ここで具体的にそれを導くことはやめる．いずれにしても **Γ は点 P におけるテンソル**（見かけ上は i について反変，r, s につき共変なテンソル）**の成分ではない．** 一次変換に対しては，Γ はたしかにその添字の示すような種類のテンソルの成分として変換される．しかし本章で扱っているような一般の座標変換に対してはテンソルの性質をもたない．このことは，ひとつの座標系では Γ の成分に 0 でないものがあっても，測地座標系においては，そのすべての成分が 0 になることから明らかである．しかしアフ

ィン係数の任意の仮想的変化 $[\Gamma^i_{rs}]$ は，それが有限の大きさの量であろうが，あるいは無限小量であろうが，いずれにしてもそれは（一般座標変換に対して）テンソルである．〔訳者注：ある量 Q と，それが仮想的に変化したのちの量を Q^* とする．この時，両者の差 Q^*-Q をここでは $[Q]$ という記号で示すことにしてある〕．なんとなれば 2 種のアフィン係数 Γ と Γ^* を使った無限小平行移動 $\mathrm{P}\to\mathrm{P}'$ により，P に在るひとつのベクトル ξ^i がこうむった変化を，それぞれ $d\xi^i$ ならびに $(d\xi^i)^*$ とすれば

$$
\begin{aligned}
[d\xi^i] &= (d\xi^i)^* - d\xi^i \\
&= (\Gamma^i_{rs})^*\xi^r dx^s - \Gamma^i_{rs}\xi^r dx^s = [\Gamma^i_{rs}]\xi^r dx^s.
\end{aligned}
$$

この左辺は，点 P から 2 種の異なる方法で P′ まで平行に移された 2 個の（点 P′ における）ベクトル $\xi^i+(d\xi^i)^*$ と $\xi^i+d\xi^i$ の差に等しい．したがって左辺はベクトル，それゆえ $[\Gamma]$ は添字の示す性質をもつテンソルである．

P に在るひとつの**共変ベクトル** ξ_i を**平行移動**によって，P にごく近接した点 P′ まで移す時はどうなるか？　それには他の任意の反変ベクトル η^i も，ξ_i と同時に平行移動をうけたとしよう．不変量は平行移動に際して，その値が変わらないという要請から，不変量 $\xi_i\eta^i$ の平行移動前後における値は互いに等しい．したがって

$$d(\xi_i\eta^i) = (d\xi_i\cdot\eta^i)+(\xi_r\cdot d\eta^r) = (d\xi_i - d\gamma^r{}_i\xi_r)\eta^i = 0.$$

η^i は任意のベクトルだから

$$d\xi_i = \sum_r d\gamma^r{}_i \xi_r. \tag{41}$$

ひとつの**反変ベクトル場** ξ^i が与えられているとする．1点Pとこれにごく近接した点 P′ を考えよう．いま P′ における $\xi^i = \xi^i(\mathrm{P}')$ が，P における $\xi^i = \xi^i(\mathrm{P})$ を無限小平行移動によって P′ まで移したものと一致しているとき，つまりP点における ξ^i の全微分 $d\xi^i$ が

$$d\xi^i + d\gamma^i{}_r \xi^r = 0 \quad \left(\text{または}\ \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} + \Gamma^i_{rs}\xi^r = 0\right)$$

を満足するとき，**反変ベクトル場** ξ^i **は点Pで定常的**であるという．1点Pにおいて，任意に与えられた値を成分にもつベクトル場を作ることは必ずできる（この注意は後に利用される）．このことから上述のような，Pにおいて定常的な場が存在しうることもわかるであろう．定常という概念は共変ベクトル場についても同様に定義できる．

さてこれからもっぱら**アフィン多様体**について議論をすすめる．**アフィン多様体とは，そのすべての点Pがその近傍とアフィン的に接続されている多様体**のことである．あるきまった座標系を用いれば，アフィン接続の成分 Γ^i_{rs} は座標 x^i の連続関数としてあらわされる．また任意の1点Pに対し，Pに適した座標系を上手にとれば，そこだけでは Γ のすべての成分を0にさせることができる．しかし多様体内のすべての点に対して同時に各点の Γ をすべて0にさせることは一般にはできない．多様体内の各点に対して，その点におけるアフィン接続の“性質”に関する限り，ど

の点についても差違はない〔つまりある1点だけの Γ を0にさせることが可能であるという性質は，どの点についても同様に成立する：訳者〕．この観点からみれば，多様体は一様である．また多様体内の各点の接続を規定するアフィン係数が異なる種類のものであれば，それにもとづくアフィン多様体も別種のものとなるはずである．しかし実はこのような別種の多様体は存在しえない．本節の冒頭に要求されたことにより，アフィン接続にはただひとつのきまった性質だけが許される．

測地線 いま1個の点が運動をするとき，同時にひとつのベクトル（どんなタイプでもよい）も点とともにその軌道にそって移動するとしよう．時間を示すパラメーター s の各値に対して点の多様体内における位置

$$\mathrm{P} = (s) : x^i = x^i(s)$$

が決定されるが，そればかりでなく，この点におけるベクトルの成分も s の関数として $v^i = v^i(s)$ のようにきめられる．もし v^i が

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad (42)$$

を満足するとき，このベクトルは瞬間 s において定常的である（微分量を用いた演算をきらう人にとっては（42）は，ホッとさせることであろう．ここでは幸いにも微小量はすべて微分係数におきかえてあるから）．一般には v^i は（42）を満足しないが，その時でも（42）の左辺を V^i とかくと

き，これは点 P の運動に，不変な方法で（つまり座標系のとりかたに無関係なやりかたで）結びついた（瞬間 s における）ベクトルを示す．この $V^i(s)$ は，瞬間 s において，単位時間中に起こる v^i の変化量（つまり v^i の時間的変化率）を示す．なんとなれば点が $\mathrm{P}=(s)$ から $\mathrm{P}'=(s+ds)$ まで移るさいに，P に在ったベクトル $v^i(s)$ は P′ に在るベクトル

$$v^i+\frac{dv^i}{ds}ds$$

に移る．もし $v^i(s)$ を P から P′ まで変化しないように（つまり平行に）移動させれば P′ におけるベクトルは

$$v^i+d'v^i=v^i-\Gamma^j_{\alpha\beta}v^\alpha dx^\beta$$

となる．P′ におけるこれら 2 個のベクトルの差が，時間 ds の間に起きた v^i の変化量である．その成分は

$$\frac{dv^i}{ds}ds-d'v^i=V^i ds$$

であたえられる．もし V^i がすべての時刻 s に対して 0 となれば，ベクトル v^i は点と一緒に軌道にそって移動するさいに，常に変化しない，つまりもとのままで移動することになる．

点のすべての運動では，必ずその速度ベクトル $u^i=\dfrac{dx^i}{ds}$ が点とともに移動する．その時は上述の V^i は

$$U^i=\frac{du^i}{ds}+\Gamma^i_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta=\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

となる．この U^i を点の**加速度**と呼ぶ．これは速度の時間

的変化の割合を示す．点のある運動で，その速度が，常に変わらないとき，この運動を**並進**と呼ぶことにする．並進によりできる点の軌道曲線を**直線**，または**測地線**という．これは，その方向を変えない曲線である．直線の本質はまさに，この並進という観点から見たその性質のなかに存在する（第 I 章§1 参照）．

テンソルならびにテンソル密度に対する解析については，第 I 章の線形幾何学におけるとまったく同じことが，アフィン多様体でもなりたつ．たとえば f_i^k を 2 階テンソル場の成分（k について反変，i について共変）とする．このとき点 P において任意のひとつの反変ベクトル ξ，および任意の共変ベクトル η を補助変数として用いて，不変量

$$f_i^k \xi^i \eta_k$$

を作る．点 P に無限小移動 d をほどこしたとき，ξ, η はそれぞれ自分自身に平行に移動されるものとする．上述の不変量は無限小移動 d に対してつぎの量だけ変化する：

$$d(f_i^k \xi^i \eta_k) = \frac{\partial f_i^k}{\partial x^l} \xi^i \eta_k dx^l - f_s^k \eta_k d\gamma_i^s \xi^i + f_i^s \xi^i d\gamma_s^k \eta_k.$$

したがって

$$f_{il}^k = \frac{\partial f_i^k}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^s f_s^k + \Gamma_{sl}^k f_i^s$$

は 3 階テンソルの成分で，k について反変，(i, l) について共変である．これは与えられた 2 階テンソルから，座標系に無関係な方法で作り出されたものである．この量のなかで，注目すべきものは Γ を含む二つの付加項である．こ

れは後にアインシュタインにより重力の影響をあらわすものと解釈された．いかなる場合にも上のやりかたに準じて，微分演算により1階だけ高い階数のテンソルが導かれる．

テンソル解析の場合には，まず“grad”という演算が登場し，それから他の種々の演算がつぎつぎにうまれた．テンソル密度解析でも，これと同様に，(35) で定義された“div”がその出発点となる．これはすべての階数のテンソル密度に対する同様な演算の手本となる．たとえば2階混合テンソル密度 $\boldsymbol{w}_i^k$ に対しては，点Pで定常的なベクトル場 ξ^i を補助に使って，まずベクトル密度場 $\boldsymbol{w}_i^k\xi^i$ を作る．そこでこの量の div を作る：

$$\frac{\partial(\xi^i \boldsymbol{w}_i^k)}{\partial x^k} = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^k}\boldsymbol{w}_r^k + \xi^i \frac{\partial \boldsymbol{w}_i^k}{\partial x^k} = \xi^i \left(-\Gamma_{ik}^r \boldsymbol{w}_r^k + \frac{\partial \boldsymbol{w}_i^k}{\partial x^k} \right).$$

これはスカラー密度である．また点Pで定常的なベクトルの成分 ξ^i はPにおいて任意の値をとることができるから，

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}_i^k}{\partial x^k} - \Gamma_{is}^r \boldsymbol{w}_r^s \tag{43}$$

は1階の共変テンソル密度である．これは $\boldsymbol{w}_i^k$ から座標系に無関係な方法で導かれたものである．

上述のように div をとることによって，1階だけ低い階数のテンソル密度を導くことができるが，逆に，またテンソル密度を微分することによって1階だけ高い階数のテンソル密度を作ることも可能である．まず $\boldsymbol{s}$ はひとつのスカラー密度とする．再び点Pで定常的なベクトル ξ^i を使って，“流れの強さ” $\boldsymbol{s}\xi^i$ の div を作る：

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{s}\xi^i) = \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x^i}\xi^i + \boldsymbol{s}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ir}\boldsymbol{s}\right)\cdot\xi^i.$$

これはスカラー密度だから，

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ir}\boldsymbol{s}$$

はひとつの共変ベクトル密度の成分である．スカラー密度の微分について上に述べた方法は，高階テンソル密度にも適用できる．たとえば2階混合テンソル密度 $\boldsymbol{w}_i^k$ に対しては，その点で定常的な任意の2個のベクトル ξ^i，η_i を補助に使う．スカラー密度 $\boldsymbol{w}_i^k\xi^i\eta_k$ を上の $\boldsymbol{s}$ のかわりに使えば $\boldsymbol{w}_i^k$ から3階混合テンソル密度を作ることができる．なお微分によって導かれた高階テンソル密度の，微分を示す添字と他の任意の反変性添字をそろえて，縮約すれば，“div” となる．

§ 16　曲率

いま2個の点 P と P* は1本の曲線で結ばれているとする．点 P にはひとつのベクトルがあたえられているとし，このベクトルを P から P* までこの曲線にそって常に自分自身に平行に移動させたとする．方程式（42）はこのようなベクトル v^i をきめる方程式であるが，もし初期値，すなわち出発点 P における v^i の値が与えられれば，（42）はこの曲線上の各点における v^i を一意的に決定する．しかしこのようなベクトルの移動法は一般には積分可能でない．つま

りPを出発しP* に到達したベクトルは一般にPからP* までたどってきた道に依存する．ただ特別な場合，つまり積分可能の条件がなりたっている時にかぎり，2個の別々の点PおよびP* におけるそれぞれのベクトルが互いに等しいという言葉が意味のあるものとなる．すなわち，平行移動によりPにあるベクトルを任意の道にそってP* まで移動させた結果が，道に無関係に常に，P* に在るベクトルに一致するとき，両ベクトルは等しいという．またそのようなときはこの多様体は**ユークリッド的アフィン多様体**とよばれる．いまこのような多様体のすべての点を無限小量だけ移動させたとする．ただしその場合，すべての点の変位は，ひとつの無限小変位に“**等しい**”無限小ベクトルで表現されるものとする．このときには**空間全体が無限小並進**を行なうことになる．この事実を利用し，第I章の考え方にしたがって（ここでは厳密な証明はしないが)，特別な“直線座標系”（Lineare Koordinatensystem）をもうけることができる．この座標系の特徴は，これを基準にすると，異なる点における等しいベクトルの成分は互いに等しくなるということである．直線座標系ではアフィン接続係数のすべての成分が多様体内のすべての点で恒等的に0となる．ふたつの直線座標系は一次変換によって一方から他が導かれる．したがってこのような多様体は実は第I章に述べた意味におけるひとつのアフィン空間である．つまり，**ベクトルの移動に対する積分可能の条件は微分幾何学的なひとつの特性である**．アフィン的に接続された多様体

のなかで，特にこの特性をもつものが“線形空間”である．

しかしわれわれは上のような特別な場合でなく，もっと一般の場合へ注意を向けねばならない．なんとなれば，ひとつのベクトルを，ひとつの閉曲線にそって平行移動をさせながら一周させて，その出発点に返すとき，それが出発前と同じベクトルになることは一般には期待できない．ストークスの定理の証明の場合と同じように，この閉曲線をワクとする曲面を考えよう．さらにこの曲面上にパラメーターを導入し，この面を2組の曲線群で無数のごく小さな平行四辺形に分割したとしよう．任意のひとつのベクトルをもとの閉曲線にそって一周させることは，上に述べた無限小平行四辺形（たとえば1点Pを基点とする2個の無限小線素 dx^i，δx^i により張られる平行四辺形）を一周することの総和で表わされる．そこで結局後者についてベクトルがいかに変化するかをしらべればよい．このベクトルを $\boldsymbol{x}=(\xi^i)$，これが無限小平行四辺形を一周してもとにもどったとき，出発前のそれ自身とのちがいを $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta\xi^i)$ とすれば，$\Delta\boldsymbol{x}$ はひとつのマトリックス $\Delta\boldsymbol{F}$ による $\boldsymbol{x}$ の一次写像として与えられる：

$$\Delta\boldsymbol{x}=-\Delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

あるいは成分でかくと

$$\Delta\xi^\alpha=-\Delta F^\alpha_\beta\cdot\xi_\beta. \tag{44}$$

もし特に $\Delta\boldsymbol{F}=0$ のときは，この多様体は点Pにおいて，この平行四辺形により規定される面の方向に対して“平坦”であるという．もし有限のひろがりをもつ閉曲線でかこま

れた面のすべての面素片に対して，それらが“平坦”ならば，任意のベクトルをこの面の周囲にそって（平行移動をつぎつぎと行なって）一周させたとき，それは出発前のベクトルに完全にたちもどる．さて $-\boldsymbol{\Delta F}$ は面素片の一次式であらわされる：

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_{ik} dx^i \delta x^k \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{F}_{ik} (\Delta x)^{ik}, \quad (\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}).\end{aligned} \tag{45}$$

ここに登場した微分形式が曲率を規定する．すなわちそれは1点Pにおいて面のすべての方向について，この多様体が“平坦さ”からどれだけズレているかを示す．ところでこの係数 $\boldsymbol{F}_{ik}$ は普通の数ではなく，マトリックスである．つまりこれは2階線形テンソルであるが，その成分は n 行 n 列のマトリックスである．これは曲率の量的性質をもっともよく表現している．いまマトリックスとしてでなく，マトリックス要素を使えば，$\boldsymbol{F}_{ik}$ のマトリックス要素は $F^{\alpha}_{\beta ik}$ となる．すなわち

$$\Delta F^{\alpha}_{\beta} = F^{\alpha}_{\beta ik} dx^i \delta x^k. \tag{46}$$

いま $\boldsymbol{e}_i$ は点Pにおける座標系の基礎ベクトルとする．これを使えば

$$\Delta \boldsymbol{x} = -F^{\alpha}_{\beta ik} \boldsymbol{e}_{\alpha} \xi^{\beta} dx^i \delta x^k. \tag{47}$$

この式から $F^{\alpha}_{\beta ik}$ はひとつの4階テンソルで，α について反変，(βik) について共変性をもつことがわかる．この F はアフィン接続係数 Γ^i_{rs} を使ってつぎのようにあらわされる：

$$F^{\alpha}_{\beta ik} = \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta k}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta i}}{\partial x^k}\right) + (\Gamma^{\alpha}_{ri}\Gamma^{r}_{\beta k} - \Gamma^{\alpha}_{rk}\Gamma^{r}_{\beta i}). \quad (48)$$

これはつぎのような反対称性と，添字を循環的にいれかえたものについての特別な関係を満足する：

$$F^{\alpha}_{\beta ki} = -F^{\alpha}_{\beta ik}; \quad F^{\alpha}_{\beta ik} + F^{\alpha}_{ik\beta} + F^{\alpha}_{k\beta i} = 0. \quad (49)$$

曲率が0になることはひとつの不変な微分法則である．この条件は微分幾何学の意味での一般的なアフィン多様体のなかから，特にユークリッド空間を取り出す役目をもつ．

上に述べたことを証明するために，本書上巻 235-236 ページで，“渦テンソル” $\dfrac{\partial f_k}{\partial x^i} - \dfrac{\partial f_i}{\partial x^k}$ を導くのに用いた手続きと同じことをここでも用いよう．すなわち無限小平行四辺形を無限小ベクトルで二重に撫でて通るという方法を使う．そのとき用いた記号をここでも使用する．いま点 $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{00}$ に在るベクトルを $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\mathrm{P}_{00})$ とする．この成分は ξ^i である．無限小線素 dx の端点を P_{10}，また dx にそって $\boldsymbol{x}(\mathrm{P}_{00})$ を平行に移動させ，P_{10} に到達したときのベクトルを $\boldsymbol{x}(\mathrm{P}_{10})$ と記す．この成分を $\xi^i + d\xi^i$ とする．そこで

$$d\xi^{\alpha} = -d\gamma^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta i}\xi^{\beta}dx^i.$$

つぎに線素 dx に，あらかじめきめられている変位 δ をほどこす．（これは必ずしも平行移動である必要はない）．このとき dx の先端にあるベクトルは，dx の基点にあるベクトルと変位のあいだじゅう，常に上に書かれた関係で結ばれているものとする．そこで変位 δ により引き起こされる $d\xi^{\alpha}$ の変化は

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta \Gamma^\alpha_{\beta i} \cdot dx^i \xi^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i} \delta dx^i \cdot \xi^\beta - d\gamma^{\alpha r} \cdot \delta \xi^r.$$

ここで特に dx の基点にあるベクトルが変位 δ にさいして常に自分自身に平行に移されるとすれば，$\delta\xi^r$ は $-\delta\gamma^r_\beta \cdot \xi^\beta$ に等しい．そこで dx の最終位置 $\overrightarrow{\mathrm{P}_{01}\mathrm{P}_{11}}$ では，点 P_{01} にはベクトル $\boldsymbol{x}(\mathrm{P}_{01})$ が配置される．これはベクトル $x(\mathrm{P}_{00})$ を $\overrightarrow{\mathrm{P}_{00}\mathrm{P}_{01}}$ にそって平行移動により運んできたものである．また P_{11} にはベクトル $\boldsymbol{x}(\mathrm{P}_{11})$ が配備される．これはベクトル $\boldsymbol{x}(\mathrm{P}_{01})$ を $\overrightarrow{\mathrm{P}_{01}\mathrm{P}_{11}}$ にそって平行移動により運搬してきたものである．つまり

$$\delta d\xi^\alpha = \{\xi^\alpha(\mathrm{P}_{11}) - \xi^\alpha(\mathrm{P}_{01})\} - \{\xi^\alpha(\mathrm{P}_{10}) - \xi^\alpha(\mathrm{P}_{00})\}.$$

つぎに，ベクトル $\boldsymbol{x}(\mathrm{P}_{10})$ を $\overrightarrow{\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_{11}}$ にそって平行移動により P_{11} まで運んできたベクトルを $\boldsymbol{x}_*(\mathrm{P}_{11})$ と記すことにすれば，d と δ をいれかえて

$$d\delta\xi^\alpha = \{\xi^\alpha_*(\mathrm{P}_{11}) - \xi^\alpha(\mathrm{P}_{10})\} - \{\xi^\alpha(\mathrm{P}_{01}) - \xi^\alpha(\mathrm{P}_{00})\}.$$

これらの差をとると

$$\begin{aligned} \Delta\xi^\alpha &= d\delta\xi^\alpha - \delta d\xi^\alpha \\ &= -\{d\Gamma^\alpha_{\beta k}\delta x^k - \delta\gamma^\alpha_r d\gamma^r{}_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta i} d\delta x^i \\ &\qquad - \delta\Gamma^\alpha_{\beta i} dx^i + d\gamma^\alpha_r \delta\gamma^r_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta i}\delta dx^i\}\xi^\beta. \end{aligned}$$

ここで $d\delta x^i = \delta dx^i$ を使えば，第 3，第 6 項は相殺する．そこで

$$\Delta\xi^\alpha = -\Delta F^\alpha_\beta \cdot \xi^\beta$$

となる．ここに $\Delta\xi^\alpha$ は同じ点 P_{11} における二つのベクトル $\boldsymbol{x}_*$ および $\boldsymbol{x}$ の差の成分を示し

$$\Delta\xi^\alpha = \xi^\alpha_*(\mathrm{P}_{11}) - \xi^\alpha(\mathrm{P}_{11})$$

である．P_{11}，P_{10}，P_{01} が $P_{00}=P$ と一致する極限をとれば，(48) がみちびかれる．

上の証明で，以前と同様に d，および δ をそれぞれ $\dfrac{d}{ds}$，ならびに $\dfrac{d}{dt}$ におきかえれば，上の議論にでてきた無限小量はすべて微係数にかわり，証明は厳密なものとなる．いま無限小変位にさいしてベクトル $\boldsymbol{x}$ がどのような変遷をたどるかを再現するために，つぎのような手順を考える．いまパラメーター s,t の1組の値に対して1点 $P=(s,t)$ の位置がきまるばかりでなく，さらにこの点に付随してひとつの共変ベクトルの成分 $f_i(s,t)$ も与えられるものとする．1点 P におけるひとつの任意のベクトルを ξ^i とし，$d(f_i\xi^i)$ は $d(f_i\xi^i)/ds$ を意味するものとする．ただし点 (s,t) から点 $(s+ds,\ t)$ まで移るとき，ベクトル ξ^i は，不変（つまり平行に移動するもの）とする．この仮定によれば $d(f_i\xi^i)$ 自身もまた $(f_i'\,\xi^i)$ の型式をしていることがわかる．ただし f'^{σ}_i は f_i とは異なるある s,t の関数である．したがって，これに再び前と同様の新しい変位，たとえば δ をほどこすことができる．そこで変位 δ を実施する．また d と δ をいれかえたものを考え，両者の差をとる．そうするとまず，

$$\delta d(f_i\xi^i)=\delta df_i\cdot\xi^i+df_i\cdot\delta\xi^i+\delta f_i\cdot d\xi^i+f_i\cdot\delta d\xi^i.$$

ところで

$$\delta df_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{df_i}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{df_i}{ds}\right)=d\delta f_i.$$

そこで

$$\Delta(f_i\xi^i) = (d\delta - \delta d)(f_i\xi^i) = f_i\Delta\xi^i.$$

この $\Delta\xi^i$ はまさにさきに求めたものである．これは点 P＝(0, 0) において不変量

$$F^\alpha_{\beta ik} f_\alpha \xi^\beta u^i v^k$$

に等しい．しかもこれは任意の共変ベクトル f_α，および 3 個の反変ベクトル ξ, u, v に依存している．したがって，$F^\alpha_{\beta ik}$ は 4 階テンソルであることがわかる．

§ 17　距離空間（計量空間）

距離多様体の概念　多様体内の 1 点 P における線素の長さが測定できるとき，**この多様体は点 P において尺度が規定されているという**．その際，無限小領域では，ピタゴラス - ユークリッドの定理がなりたつものと仮定する．**そこで P における任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ はひとつのきまった“大きさ”をもち**[5]，**またひとつの縮退していない二次形式 $\boldsymbol{x}^2$**（きまった正の次元数 p と，負の次元数 q をもつものとする．ここで $p+q=n$）**が存在し，任意の二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{y}^2$ のときに限り，これらのベクトルは同じ“大きさ”をもつものと要請する**．この要請から，二次形式は 0 でないひとつの比例因数をのぞいて，一意的

5)　訳者注：原著の Strecke という言葉をここでは“大きさ”と訳した．しかしこの意味は普通使われるベクトルの大きさの 2 乗に相当するものである．そこで普通の意味の大きさと区別するために本書では，もっぱら“大きさ”と記す．

にきまる．したがってこの比例因数をきめれば，この多様体は点 P において，その尺度が完全に規定されたことになる．そこで数値 $\boldsymbol{x}^2$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の計量値と呼ぶ．またこれは $\boldsymbol{x}$ の“大きさ”に依存するから，この数値を $\boldsymbol{x}$ の“大きさ”の計量値ともいう．“大きさ”がちがうベクトルの計量値は等しくない．点 P におけるベクトルの“大きさ”はひとつの 1 次元的集合をなす．もし上述の比例因数の値を変えれば，もとの計量値 l から新しい計量値 $\bar{l}$ に変わる．$\bar{l}$ は l に，ベクトルの“大きさ”に無関係な 0 でない定数 λ $(\neq 0)$ をかけたものに等しい：$\bar{l}=\lambda l$．しかし種々のベクトルのそれぞれの計量値の比はこの λ（あるいは上述の比例定数）には無関係である．そこで 1 点 P に在るひとつのベクトルの成分を示す数値が，座標系に依存するように，ベクトルの“大きさ”をひとつの数値で示すことは，上述の比例因数，つまり尺度の基準（Eichung）のきめ方に依存する．ひとつのベクトルの成分は，座標系の変更にさいして，一次同次変換をこうむる．これと同様に，任意のベクトルの“大きさ”の計量値は，尺度の基準の変更により，$l \rightarrow \lambda l$ のような変換をこうむる．——1 点 P における二つのベクトルを $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ とする．$\boldsymbol{x}^2$ に対応する対称双一次形式 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ が 0 となるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するという．この関係は尺度の基準のきめ方には無関係である．$\boldsymbol{x}^2$ が正定符号の二次形式であるという仮定はわれわれの議論にとってはどうでもよいことであるが，しかし今後，まずはじめには，この仮定のもとに議論をすすめる．また正の次元数と，負の

次元数を明示するために，“多様体は点 P において $(p+q)$ 次元である” ということにする．$p \neq q$（これもわれわれは仮定する）ならば，p, q の数が変わらないようにするためには，（また p と q とがいれかわらないためにも）尺度の基準に含まれる比例因数は常に正にとらねばならない．そこで，ひとつの座標系をきめ，さらに尺度の比例因数もきめると，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$（その成分を ξ^i）に対して

$$\boldsymbol{x}^2 = \sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k \qquad (g_{ik} = g_{ki}) \tag{50}$$

の数値がきまる．

さて，われわれの多様体は，そのなかのすべての点において尺度が規定されているものとする．また p, q はすべての点で同じ数であるとする（すなわち p の値が場所により変わるようなことはないとする．q についても同様である）．そこですべての点における尺度の比例因数をきめ，また n 個の座標 x^i からなる座標系を導入すれば，——多様体内に登場するすべての量を数で表わすためには以上の二つのことは必ずやらねばならない——（50）の g_{ik} は x^i のきまった関数となる．われわれはこれに対して，連続で，連続微分可能と仮定する．

ひとつの多様体が**距離空間**であるためには，そのなかのすべての点において尺度が規定されているだけでは十分でない．さらに各点はその近傍と**計量的に接続**されている必要がある．この計量接続という概念はアフィン接続と似たものである．後者はベクトルの成分に関する概念であり，

前者はベクトルの“大きさ”に関するものである．いまPと，これにごく近接した任意の点P′があるとする．Pに在る任意のベクトルの“大きさ”が，PからP′まで合同に移されるときP′ではこの“大きさ”がいくらになるかが規定されているとき，点Pはその近傍と計量的に接続しているという．この概念に結びついた唯一の要請はつぎのことである：Pにある任意のベクトルの“大きさ”の計量値が，Pの無限小近傍の任意の点P′まで合同に移されたとき，その値が不変となるように，Pの近傍の尺度の基準をきめることが必ずできるということである．このような基準のきめ方を点Pにおいて**測地的**であるという．――もし測地的でなく，勝手な基準のきめ方がされているとすれば，Pにおける計量値 l が合同移動によってP′まで運ばれたとき，P′におけるそれの計量値を $l+dl$ とすれば，必然的に

$$dl = -l d\varphi \tag{51}$$

がなりたつ．ここに $d\varphi$ は l には無関係な無限小量である．なんとなればこのような移動はPにおけるベクトルの“大きさ”を，P′における“大きさ”へ相似写像するからである．$d\varphi$ は，ベクトルのアフィン接続（38）における $d\gamma_r^i$ に対応するものである．もしPおよびその近傍における尺度の基準が $l \to \bar{l} = \lambda l$ に変更されると（λ は正で，場所の関数である），（51）のかわりに

$$d\bar{l} = -\bar{l} d\bar{\varphi}$$

となる．ここで $d\bar{\varphi}$ は

$$d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{52}$$

である．$d\bar{\varphi}$ が点 P において，λ を適当にえらんだとき，無限小変位 $\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = (dx^i)$ に対して恒等的（dx^i のとりかたに無関係に）に 0 となるための必要十分条件は，$d\varphi$ が

$$d\varphi = \varphi_i dx^i \tag{51'}$$

の形の一次微分形式であらわされるということである．(51)，(51′) ははじめに述べた要請からの結果である．――（いま点 P で $x^i = 0$ となるように座標系をえらんだとする．φ_i は点 P においては与えられた数値である．そこで $d\bar{\varphi} = 0$ とするためには $\log\lambda = \sum_i \varphi_i x^i$（P の近くで）ととればよい）．――多様体内のすべての点は，尺度の決定，ならびに各点とその近傍との計量接続の性質に関して完全に一様である．しかし n が偶数のときは $\frac{n}{2}+1$ 通り（奇数なら $\frac{n+1}{2}$ 通り）の，異種の距離多様体が考えられる．これらは距離の基本形式の慣性指数によって互いに区別される．このうちのひとつ（これについてわれわれは特にこれから論じたいが）は $p=n$，$q=0$（または $p=0$，$q=n$）に相当する．そのほかに $p=n-1$，$q=1$（または $p=1$，$q=n-1$）；$p=n-2$，$q=2$（または $p=2$，$q=n-2$）；……がある．

ここで以上のべたことをまとめる．多様体の計量（すなわち距離）は，ひとつの基準系（＝座標系と尺度の基準）が与えられたとき，これを基準にして，つぎの二つの基本形式により決定される．そのひとつは微分二次形

式 $Q=\sum_{ik} g_{ik}dx^i\cdot dx^k$，他は一次式 $d\varphi=\sum_i \varphi_i dx^i$ である．これらはともに，座標系をかえても不変である．また尺度の基準を変えると，前者は $Q\to\lambda Q$（λ は x の正の関数で，連続微分可能）となり，後者は $d\varphi\to d\varphi-d(\log\lambda)$ となる．計量的な関係を解析的に示すすべての量や関係式は，二種類の関数 g_{ik} と φ_i を，つぎのような不変性を満足する形で含まねばならない．すなわち 1．任意の座標変換に対する不変性，および 2.

$$g_{ik}\to\lambda\cdot g_{ik},\quad \varphi_i\to\varphi_i-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}$$

というおきかえに対する不変性（これを**測度不変性**，または**ゲージ不変性**と呼ぶことにする）．ここで λ は正の，x の任意関数である．

§16 では，ひとつのベクトルを自分自身に平行に移動させながら，線素 dx^i，および δx^i で張られた平行四辺形を一周したとき，その変化を計算した．それと同じように，ここでもベクトルの（長さ）$^2=l$ が合同移動により一周した後に Δl だけ変わったとする．これを前と同じ過程に従って計算してみよう．まず $dl=-ld\varphi$ であるから

$$\delta dl=-\delta l\cdot d\varphi-l\cdot\delta d\varphi=l\delta\varphi\cdot d\varphi-l\cdot\delta d\varphi.$$

そこで

$$\Delta l=d\delta l-\delta dl=-l\cdot\Delta\varphi. \tag{53}$$

ここで

$$\Delta\varphi = (d\delta - \delta d)\varphi = \frac{1}{2} f_{ik}(\Delta x)^{ik}, \quad f_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}$$

である．この f_{ik} は2階線形テンソルである．§ 16 ではアフィン空間の“ベクトル曲率”（Vektorkrümmung）が導かれたが，この f_{ik} はまさにそれに対応するもので，これは距離空間の“大きさの曲率”（Streckenkrümmung）とでもいうべきものであろう．$\Delta\varphi$ は測度不変であることが解析的にたしかめられる．また f_{ik} は一般座標変換に対して不変な方程式

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} = 0$$

を満足する．一般に**任意の点にあるベクトルの“大きさ”を合同移動によって，他の点まで移すとき，その結果が途中の道筋によらないための必要十分条件は，すべての点で $f_{ik}=0$ となることである．**このような場合は，リーマンが特に注目したケースである．そこでこれを**リーマン的距離空間**とよぶことにする．リーマン的距離空間では空間内の離れた2点におけるベクトルの大きさを比較することは意味のあることである．このような空間ではいたる所で $d\varphi=0$（これを“**標準測度**”とよぶ）とすることができる．（$f_{ik}=0$ の時は $\Delta l=0$ であるのみならず，$dl=0$ とすることができる．なんとなれば $f_{ik}=0$ から $d\varphi=\varphi_i dx^i$ は全微分，すなわち $d(\log\lambda)$ の形にかくことができるから，$d\bar{\varphi}=d\varphi-d(\log\lambda)=0$ にすることができる）．標準測度をとれば，リーマン的空間では距離の基本形式 Q は任意の定

数の因数を別にすれば，完全に定まったものとなる．この定数因数は，長さの単位（これはどこできめてもよい．また一度きめられた標準物さしはどこにでも，その長さの変化なしに，持ち運びできる）をひとたび決定すれば，完全にこの因数もきまってしまう．

距離空間のアフィン接続

いまわれわれは，私が以前，微分幾何学の基本的事実と呼んだものに到達した．この事実こそが幾何学を素晴らしい，そして調和のとれた建築物にまで仕上げたのである．そこでそれについてこれから述べよう．距離空間では無限小平行移動という概念は，つぎのような要請によりただひと通りに規定される．すなわち，任意のベクトルの無限小平行移動にさいしては，前節で要請された条件が満たされるばかりでなく，さらに，そのベクトルの“大きさ”も変わらないように移動されねばならない．この結果計量幾何学の根底にある，ベクトルの“大きさ”（長さ）の無限小移動に関する原理は，同時に，ベクトルの方向が移動にさいしてどのようにふるまうべきかについての規則を教えてくれる：つまり距離空間は，元来ひとつのアフィン接続をも同時に，賦与された空間である．

証明　われわれはひとつの基準系（＝座標系＋尺度の基準）を定め，これを基準に証明をする．いまひとつの添字が（この他にも添字をもっていてかまわない）上側についている量 a^i（これはなんでもかまわない）の添字 i を下に

引きおろしたものは

$$a_i = \sum_j g_{ij} a^j$$

によって与えられるものとする．またこの式の逆により下側についている添字は上につり上げられるものと約束する．さて点 $\mathrm{P} = (x^i)$ にあったひとつのベクトル ξ^i を平行移動により点 $\mathrm{P}' = (x^i + dx^i)$ まで持って来たとき，それの P' における成分が $\xi^i + d\xi^i$ になったとする．したがって

$$d\xi^i = -dr^i{}_k \cdot \xi^k, \qquad dr^i{}_k = \Gamma^i_{kr} \cdot (dx)^r.$$

またこのベクトルの"大きさ"（の計量値）

$$l = g_{ik} \xi^i \xi^k$$

に対しては，上に述べた要請から，

$$dl = -l \cdot d\varphi$$

がなりたつ．ξ を使ってかきなおすと

$$2\xi_i d\xi^i + \xi^i \xi^k dg_{ik} = -(g_{ik} \xi^i \xi^k) \cdot d\varphi.$$

この左辺の第一項は

$$= -2\xi_i \xi^k d\gamma^i_k = -2\xi^i \xi^k d\gamma_{ik} = -\xi^i \xi^k (d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki})$$

となるから，上の式は

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik} + g_{ik} d\varphi,$$

または

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} + g_{ik} \varphi_r. \tag{54}$$

この式の添字 $(i\ k\ r)$ を循環的におきかえることにより，(54) のほかに，これに似た 2 個の式を作り，これら 2 個の和から (54) を引けば，$\Gamma_{r,ik}$ が (ik) について対称であ

ることを考慮すると,

$$\Gamma_{r,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{ir}\varphi_k + g_{kr}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r\right) \quad (55)$$

となる. Γ^r_{ik} は

$$\Gamma_{r,ik} = g_{rs}\Gamma^s_{ir} \quad \text{または} \quad \Gamma^r_{ik} = g^{rs}\Gamma_{s,ik} \quad (56)$$

によって (55) から与えられる. ここに導かれたアフィン接続係数の成分は, 今までに述べたすべての要請を満足している. この証明により距離空間は, 本来, (56) であたえられるアフィン接続を賦与されていることがわかる. その結果, テンソルやテンソル密度の解析学のすべて, ならびに測地線とか曲率のような以前に導入されたすべての概念は全部この距離空間においても成立する. もし曲率がいたるところで恒等的に 0 になれば, この空間は, 第 I 章に述べた意味で, ユークリッド的計量空間となる. 以上述べたことで, §12 に述べた第 2 の質問 (本書上巻 203 ページ参照) は解答を与えられたことになる. つまり上に述べた証明はつぎの事実を示している: ベクトルの長さは平行移動に際して, 忠実にそのまま移されるということを示すものが §12 の公式 (19), あるいはそれを一般化した公式 (54) である.

系 1 "ベクトル曲率" (本書上巻 267 ページ参照) について, なおひとつの重要な事実を述べよう. それは曲率の成分を二つの項の和に書きあらわすことである. このよう

な分離の結果，“**大きさの曲率**”（本書上巻 267 ページ参照）はベクトル曲率の中にその一部として自動的に含まれていることが明らかになる．これは当然のことといえる．なぜなら，ベクトルを移動させれば，それは同時にベクトルの“大きさ”の移動をともなうからである．いまベクトル (ξ^i) が，ある面素片を一周した結果，$(\xi^i+\Delta\xi^i)$ に変わったとする．その場合，このベクトルの“大きさ”を示す計量値 $l=(\xi_i\xi^i)$ は

$$\Delta l = -l\Delta\varphi \tag{53}$$

という変化をこうむる．この変化はあるひとつの場所で，またひとつのきまった面の位置について行なわれるから $\Delta g_{ik}=0$ であることに注意して，

$$\Delta l = \Delta(g_{ik}\xi^i\xi^k) = g_{ik}(\Delta\xi^i\cdot\xi^k+\xi^i\cdot\Delta\xi^k) = 2\xi_i\cdot\Delta\xi^i.$$

これを（53）に代入すると，つぎの結果が導かれる．まず，ベクトル $\boldsymbol{x}=(\xi^i)$ に対して

$$\Delta\boldsymbol{x} = {}^*\Delta\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\Delta\varphi\cdot\boldsymbol{x}$$

とおけば，右辺第 1 項は $\boldsymbol{x}$ に垂直，第 2 項は $\Delta\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{x}$ 自身に平行な部分を示すことがわかる[6]．そこで曲率テンソルについても，これと同じ形の分離が導かれる：（(47)，(53) 参照）

6) 訳者注：この点における座標系の基礎ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とすれば，$(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)=g_{ik}$，$\boldsymbol{x}=\sum_i \boldsymbol{e}_i\xi^i$ である．そこで本文の $\Delta\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ のスカラー積を作ると

$$F^{\alpha}_{\beta ik} = {}^{*}F^{\alpha}_{\beta ik} + \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta} f_{ik}.$$

ここで右辺第1項の $^{*}F$ を“**方向曲率**”（Richtungskrummung）とよぶことにする．これを使うと

$$^{*}\Delta\boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}{}^{*}F^{\alpha}_{\beta ik}\boldsymbol{e}_{\alpha}\xi^{\beta}(\Delta\boldsymbol{x})^{ik}.$$

上に述べたように $^{*}\Delta\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ に垂直だから

$$-(\boldsymbol{x}\cdot{}^{*}\Delta\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}{}^{*}F^{\alpha}_{\beta ik}\xi_{\alpha}\xi^{\beta}(\Delta\boldsymbol{x})^{ik}$$
$$= \frac{1}{2}{}^{*}F_{\alpha\beta ik}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}(\Delta\boldsymbol{x})^{ik} = 0.$$

したがって $^{*}F_{\alpha\beta ik}$ は単に (ik) ばかりでなく，$(\alpha\beta)$ についても反対称であることがわかる．この性質から特に

$$^{*}F^{\alpha}_{\alpha ik} = 0.$$

系 2 いま1点Pおよびその近傍で，座標系も尺度の基準もともに測地的になるように選定したとする．したがってここでは $\varphi_i = 0$，$\Gamma^{r}_{ik} = 0$ となる．あるいは (54)，(55) によって

$$\varphi_i = 0, \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} = 0,$$

つまり，点Pでは $d\varphi = 0$ であり，g_{ik} は定常値をもつ

$$(\boldsymbol{x}\cdot\Delta\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}\cdot{}^{*}\Delta\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\Delta\varphi\cdot l.$$

一方 $$(\boldsymbol{x}\cdot\Delta\boldsymbol{x}) = \xi^{i}\Delta\xi^{k}g_{ik} = \frac{1}{2}\Delta l$$

だから，上の式は $\Delta l = -l\cdot\Delta\varphi + 2(\boldsymbol{x}\cdot{}^{*}\Delta\boldsymbol{x})$.
これと (53) をくらべると，$(\boldsymbol{x}\cdot{}^{*}\Delta\boldsymbol{x}) = 0$ となる．

（ユークリッド空間では，ひとつの適当な基準系をとると，P におけるここに述べたような事情が，空間内のすべての点において同時にあらわれる）．ここに述べたことから，距離空間における任意のベクトルの平行移動に対してつぎのような明快な定義が導かれる：ある基準系からみたとき，1 点 P における φ_i は 0 であり，g_{ik} は定常値を示すならば，この基準系は P において測地的である．1 点 P における**測地的な基準系**からみたとき，P からその無限小近傍に属する任意の点 P′ まで，ひとつのベクトルを移動させた場合に，その成分に変化がないときは，このベクトルは自分自身に平行に移動されたことになる（任意の点に対して，必ずその点に所属する測地的基準系が存在する．1 点 P における測地的基準系といっても，種々あるが，そのどれをえらんでも，平行移動の概念にはなんら影響を与えない）．

系 3　距離空間における**並進**[7)] $x^i = x^i(s)$ にさいしては，各点におけるその速度 $u^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ は自分自身に平行に移されるから，u^i は

$$\frac{d}{ds}(u_i u^i) + (u_i u^i)(\varphi_j u^j) = 0 \tag{57}$$

を満足する．ここである瞬間に $u^i u_i = 0$（これはたとえば

7)　訳者注：本書では既に約束したように質点の運動により描かれる軌道曲線 $x^i = x^i(s)$ 自身を単に“運動”と呼ぶ．ここでは並進運動により質点の描く軌道曲線が $x^i = x^i(s)$ であるという意味である．

計量基本形式 Q が定符号でないならば u^i の各成分がすべて 0 でなくても実際におこりうる）であるとすれば，この条件は並進 $x^i = x^i(s)$ のすべての瞬間においてなりたつ．このような条件をみたす並進の軌道を**ゼロ測地線**（geodätische Nullinie）という．このようなゼロ測地線については，各点の尺度の基準のとりきめはそのままに保ち，多様体の計量接続だけを任意に変更しても，このゼロ測地線には変化のないことを簡単な計算で示すことができる．

系 4　リーマン幾何学に対してわれわれが行なった二つの拡張（すなわち，ひとつは計量基本形式が正定符号でない場合への拡張，もうひとつは“大きさ”の合同移動が積分可能でない場合への拡張）の結果，線の長さ，面積，体積，……をあつかう大きさの幾何学（Massgeometrie）を論ずることは不可能となった．たとえば計量基本形式が定符号をもたないために，§11 のおわりにあたえられた角の測定に対する公式（15）は使えなくなる．さらに同じ節の最後の 3．において使用された原理，すなわちわれわれの距離空間の中に埋めこまれている低次元多様体 $\boldsymbol{R}_m$ はまたひとつの距離空間であるという原理はなりたたなくなる．なんとなれば，$\boldsymbol{R}_m$ を規定する制限式を代入することによって導き出された $\boldsymbol{R}_m$ の計量基本形式は，$\boldsymbol{R}_m$ のある場所で，ときにはいたるところで，縮退した二次形式となるから．また“大きさ”の移動の積分可能性を否定することにより §11 のおわりの 1 で定義された体積の測定は不可能になる．なんとなれば §11 の積分（14）は測度不変でないか

ら．このような事情は，幾何学にとってはまことに手痛いことであるが，この損害に対して第 IV 章で私は償いをしよう．そこでは“大きさの幾何学”のかわりに場の物理学が登場する．また体積のかわりに積分不変量として“作用”が登場する．

テンソル算 本来のテンソルという概念によれば，その成分は座標系に依存するが，尺度の基準には無関係である．しかしこれからある一次形式が，座標系の変換に対しては従来の定義によるテンソルと同じように変換され，また尺度の基準の変更に対しては，もとの量の λ^e 倍になるとき（ただし λ は新旧の測度の比を示す正の量）この一次形式を拡張された意味で，**測度の重みが e 次のテンソル**と呼ぶことにする．したがって g_{ik} は重みが 1 次の 2 階対称共変テンソルの成分である．何も余計な注釈がつかないでただテンソルというときは，重みが 0 次のテンソルを意味するものとする．テンソル解析で扱われる関係式は，本来の意味でのテンソルやテンソル密度の間の関係式で，それは一般座標変換に対してばかりでなく，測度変換に対しても不変なものである．ここに導入された拡張されたテンソル概念は，重みが e 次のテンソル密度と同様に，それらはすべてひとつの補助的概念とみなすべきである．それらは単に計算の便宜のために導入されたものである．この計算上の便宜はつぎの事実にもとづいている．1）まず拡張されたテンソルについては“添字の曲芸”が可能である．いま測度の重みが e のひとつのテンソルの成分の任意のひとつの反変

添字を g_{ik} によって下側へ移すと，この成分は，この引きおろされた添字について共変であり，またその重みは $e+1$ となる．逆に g^{ik}（これは -1 次の重みをもつ 2 階テンソル）により下側にある添字をつり上げれば，テンソルの重みは 1 次だけ減少する．2）負の次元数 q が偶数か奇数かに応じて，$+$ または $-$ を g_{ik} の行列式にかけたものを g で表わすことにする．つまり g は $\det(g_{ik})$ の絶対値を示す．また $\sqrt{g}$ は正数 g の正の平方根を示す．さて任意のテンソルに $\sqrt{g}$ をかければテンソル密度ができる．この測度の重みはもとのテンソルのそれより $n/2$ 次だけ高い．特に重みが $-\dfrac{n}{2}$ 次のテンソルからは従来の意味でのテンソル密度（つまり測度の重みが 0 次の密度）ができあがる．この証明は，$\sqrt{g}$ 自身が測度の重みが $n/2$ 次のひとつのスカラー密度であるという事実（これは容易に納得できよう）を使えばすぐにわかる．$\sqrt{g}$ をかけたこと，つまり密度量にかわったことを示すために，もとのテンソルを示すのに使われた細字のラテン文字を太字に書きかえることにする．リーマン幾何学では“標準測度”（つまり空間のいたるところで $\varphi_i\equiv 0$ となる測度）を用いることにより，基本二次形式 Q は完全に決定される（任意の定数因数についてはもはやいう必要はあるまい）．このときはテンソルの重みについてのちがいは消え去る．なんとなれば，ひとつのテンソルで表現できる量は，またこのテンソルに $\sqrt{g}$ をかけて作ったテンソル密度で表現することも可能である．テンソルとテンソル密度のちがいは，測度を固定してしまった以上この

場合には消える（このことは，共変テンソルと反変テンソルの間にちがいがないのと同様である）．〔訳者注：テンソルとテンソル密度は，それらの変換性に着目するとき，もちろん，はっきりと差違がある，共変と反変テンソルについても同様である．しかしここでいっていることは，たとえばある物理量をテンソルを使って表現しても，テンソル密度で表わしても，測度変換を考えない限りどちらでもよい．それは単なる表現のちがいにすぎない．それは $\sqrt{g}$ をかけるか否かだけのちがいにすぎないということである〕．このような事情を考えると，テンソルにくらべてテンソル密度が永いあいだ，その価値を認められなかった理由も納得できよう．

§ 18　テンソル算の例題．リーマン空間における最短曲線

幾何学では，計量自身から導かれる場を座標系のとりかたに無関係な方法で作るのにテンソル算を利用する．このことについて二つの例をあげよう．これは後に非常に役にたつものである．まず曲率テンソルから縮約によって

$$F^{\alpha}_{\alpha ik} = \bar{f}_{ik}$$

を作る．これに対応する量 $\frac{1}{2}\bar{f}_{ik}(\Delta x)^{ik}$ は，成分 $(\Delta x)^{ik}$ をもつ面素片の周囲にそって体積 V の平行多面体を一周させるとき，この V がどんなに変化するかを与えるものであ

る：

$$\Delta V = -V \cdot \frac{1}{2} \bar{f}_{ik} (\Delta x)^{ik}.$$

ここで V は，上記の平行多面体を張る n 個の線形独立なベクトルの成分から作られる行列式を示す[8)]．距離空間では，本書上巻 270–272 ページに述べたことから，$\bar{f}_{ik} = \dfrac{n}{2} f_{ik}$，またリーマン空間では $\bar{f}_{ik} = 0$ となる．曲率テンソルの縮約には，別の縮約のとりかたがある．それは

$$F_{ik} = F^{\alpha}_{i\alpha k}.$$

これをさらに縮約すると

$$F = g^{ik} F_{ik}$$

8) 訳者注：n 個のベクトル $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の第 k 成分を $\xi^{(i)k}$ とする．したがって，$V = \sqrt{g} \det(\xi^{(i)k}) = \sqrt{g} \sum_{k=1} v_{(i)k} \xi^{(i)k}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ である（本書上巻 180 ページ参照）．ここで $v_{(i)k}$ は行列要素 $\xi^{(i)k}$ に対応する余因子である．そこで

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sqrt{g} \sum_{i,k} v_{(i)k} \Delta \xi^{(i)k} \\ &= -\sqrt{g} \sum_{i,k,l} v_{(i)k} \cdot \frac{1}{2} F^{k}_{lmn} (\Delta x)^{mn} \cdot \xi^{(i)l} \\ &= -\sum_{k,l} V \cdot \delta^{l}_{k} \frac{1}{2} F^{k}_{lmn} (\Delta x)^{mn} \\ &= -V \cdot \frac{1}{2} \bar{f}_{mn} (\Delta x)^{mn}. \end{aligned}$$

ここで

$$\sqrt{g} \sum_{i} v_{(i)k} \xi^{(i)l} = \delta^{l}_{k} \cdot V, \qquad \Delta g_{ik} = 0$$

なる関係を使った．

となる．この F は g^{ik} のために，測度の重みが -1 次のスカラーである．いま多様体内のある領域で $F \neq 0$（たとえば $F>0$）とする．このときは方程式 $F=$ 定数によって長さの単位を規定できる：すなわちこの多様体のP点における“曲率半径”を基準として，P点におけるベクトルの“大きさ”を測定できることになる．これは一見，不思議なことのように思われる．なんとなれば，一般の距離空間における長さの移動に対するもともとの解釈は，上述のことと矛盾しているからである．すなわち元来の考えかたによれば，離れた2点における長さを直接，比較することはできなかったはずである．しかしわれわれはここでつぎの点に注意しなければならない．すなわちここに述べた長さの基準の決定は各場所における多様体の曲率のふるまいに依存するということである（ここに述べたような特別な統一的な尺度の基準が存在することは，リーマン空間において，その計量をもとにしてある特別な座標系を設置するのと同様に，それほど驚くべきことではない）．なお，このような長さの特別な単位を用いて測定された“体積”は，積分不変量

$$\int \sqrt{g \cdot F^n} dx \tag{58}$$

で表わされる．

4次元空間では“大きさの曲率” f_{ik} から導かれる線形テンソル密度は

$$\mathfrak{f}^{ik} = \sqrt{g} \cdot f^{ik}$$

である．これの測度に対する重みは 0 次である．そこで

$$\mathbf{l} = \frac{1}{4} f_{ik} \mathbf{f}^{ik} \tag{59}$$

は計量場だけから作られるもののなかで最も簡単な（従来の意味での）スカラー密度である．また $\int \mathbf{l} dx$ は最も簡単な積分不変量である．またこの $\mathbf{f}^{ik}$ からその div をとることによって，流れの密度（ベクトル密度）$\mathbf{s}^i$ を作ることができる：

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{ik}}{\partial x^k} = \mathbf{s}^i.$$

リーマン空間（つまりいたるところで $f_{ik}=0$）では，もし標準測度（$\varphi_i=0$）を用いるならば，g_{ik} が唯一の基本量となる．ここではクリストッフェルの三指標記号を用いて，以下に種々の公式を列挙する．これらはいずれも後の計算に役だつ[9]．

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} - \begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} = 0, \tag{60}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} \cdot g^{ik} \right) + \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} \cdot g^{rs} = 0, \tag{60'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{g} \cdot g^{ik} \right) + \begin{Bmatrix} lr \\ i \end{Bmatrix} g^{rk} + \begin{Bmatrix} lr \\ k \end{Bmatrix} g^{ri} - \begin{Bmatrix} lr \\ r \end{Bmatrix} g^{ik} = 0. \tag{60''}$$

これらの式を証明するためにまず，$\sqrt{g}$ はスカラー密度，$\sqrt{g} \cdot g^{ik}$ はテンソル密度であることに注意する．そこでこ

れらの式の左辺に $\sqrt{g}$ をかけると，テンソル密度の解析学によれば，これらの左辺全体はそれぞれひとつのテンソル密度となる．ところで，いま点Pで測地的な座標系（すなわち点Pで $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}=0$）を使えば，この左辺の各項はすべて0となる．したがって測地系からみればこの3個の式は成立している．そこで上述の性質，つまり各左辺はそれぞれテンソル密度であることに留意すれば，測地系において成立した関係は任意の座標系からみても成立する．このほかにさらに

$$\frac{dg}{g}=g^{ik}dg_{ik},\qquad \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}}=\frac{1}{2}g^{ik}dg_{ik} \tag{61}$$

という関係式もなりたつ．なんとなれば，n^2 個の独立な要素 g_{ik} からなる行列式の全微分は $=G^{ik}dg_{ik}$ のようにかきあらわされるから．ここで G^{ik} は g_{ik} に対応する余因子である．〔訳者：$G^{ik}=g\cdot g^{ik}$ である〕．——$\boldsymbol{t}^{ik}$ $(=\boldsymbol{t}^{ki})$ を，2個の対称な上側添字をもつ任意の量とすれば，

$$\boldsymbol{t}^{ik}dg_{ik}=-\boldsymbol{t}_{ik}dg^{ik}. \tag{62}$$

なんとなれば，

$$g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$$

から

9）訳者注：

$$\begin{bmatrix} rs \\ i \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s}+\frac{\partial g_{is}}{\partial x^r}-\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\right),\ \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}=g^{ik}\begin{bmatrix} rs \\ k \end{bmatrix}$$

$$g_{ij}dg^{jk} = -g^{jk}dg_{ij}.$$

この両辺に $\boldsymbol{t}_k^i$ をかけると（この添字については誤解はないと思う．なぜなら

$$\boldsymbol{t}^i{}_k = g_{kl}\boldsymbol{t}^{il} = g_{kl}\boldsymbol{t}^{li} = \boldsymbol{t}_k{}^i$$

だから $\boldsymbol{t}^{ik}$ の上側添字の右のものを降ろしたと考えてもよいし，左の添字が降りたと思っても区別は無用である)，(62) が導かれる．そこで (61) のかわりに

$$\frac{dg}{g} = -g_{ik}dg^{ik} \qquad (61')$$

としてもよい．

リーマン空間では共変曲率テンソルの成分 $R_{\alpha\beta ik}$（リーマン空間のときは曲率テンソルを示すのに特に F のかわりに R を使う）はつぎのような対称条件を満足する：

$$R_{\alpha\beta ki} = -R_{\alpha\beta ik}, \qquad R_{\beta\alpha ik} = -R_{\alpha\beta ik},$$

$$R_{\alpha\beta ik} + R_{\alpha ik\beta} + R_{\alpha k\beta i} = 0$$

（なぜなら，“大きさの曲率” $f_{ik}=0$ だから）．上の関係式からさらに

$$R_{\alpha\beta ik} = R_{ik\alpha\beta}$$

を導くことは容易にできる [17]．§7 のおわりに述べた注意に従えば，上述のすべての関係式から，つぎのことが結論として導かれる．すなわち曲率テンソルは，任意の面素片 $(\Delta x)^{ik}$ の二次形式

$$\frac{1}{4}R_{\alpha\beta ik}(\Delta x)^{\alpha\beta}(\Delta x)^{ik}$$

により完全に規定されるということである．もしこの二次形式を面素片の大きさの2乗〔すなわち $\frac{1}{2}(\Delta x)_{ik}(\Delta x)^{ik}$〕で割れば，その結果はもっぱら $(\Delta x)^{ik}$ の比だけに依存する．つまり面素片の方向にのみ依存する．この量をリーマンは，点Pにおける，当該の面素片の方向に対する空間の曲率と名づけた．これは簡単な幾何学的な意味をもつものである．いま成分 $(\Delta x)^{ik}$ をもつ面素片 $\Delta\sigma$ の周囲にそってひとつの羅針盤を一周させたとき，この針のこうむる回転を考えてみよう．ただしここでは針の回転面は面素片 $\Delta\sigma$ と同じ平面内にあるものとする．つまり羅針盤をひとつの2次元平面と考える．それは平面 $\Delta\sigma$ の中にあるベクトル $\boldsymbol{x}$ の張る平面 E である．いまこのようなひとつのベクトル $\boldsymbol{x}$ が，平行に移動しながら $\Delta\sigma$ を一周したとする．一周後，$\boldsymbol{x}$ のこうむった変化を $\Delta\boldsymbol{x}$ とすれば，一般にはこれは E に平行な部分と，E に垂直な部分に分けられる：$\Delta\boldsymbol{x}=\overline{\Delta\boldsymbol{x}}+\Delta_n\boldsymbol{x}$．この第二項を引き去れば，$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}+\overline{\Delta\boldsymbol{x}}$ は平面 E の中での無限小回転である．$\Delta\omega$ をその回転角とすれば，リーマン曲率は $\Delta\omega/\Delta\sigma$ に等しい．——アインシュタインの重力論では，縮約された2階のテンソル

$$R_{ik}=R^{\alpha}_{i\alpha k}$$

は重要な役目を演ずる．これはリーマン空間では対称テンソルである．その成分は

$$R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix} \tag{63}$$

である．この右辺の第 2 項は添字 (i, k) について対称であることが，すぐにはわかりかねる．しかしこの項は (60) により

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\log g)}{\partial x^i \partial x^k}$$

に等しい．一般の距離空間の二種の基本形式を

$$g_{ik}dx^i dx^k \quad \text{および} \quad \varphi_i dx^i$$

とする．この空間のスカラー曲率 F は，基本形式

$$g_{ik}dx^i dx^k \quad \text{および} \quad 0$$

をもつリーマン空間のスカラー曲率 R を使って

$$F = R - (n-1)\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\varphi^i)}{\partial x^i}$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{4}(\varphi_i \varphi^i) \tag{64}$$

のように書きあらわされる．

ユークリッド空間において，直交座標系とかアフィン座標系のかわりに，曲線座標系を用いて計算をするときは，一般のテンソル解析は，ユークリッド幾何学においても，大いに役にたつ．この事情は数理物理学においてしばしば経験することである．テンソル解析のこのような応用を例示するために，**静電場の基礎方程式や定常電流による磁場**

の基礎方程式を一般の曲線座標系を用いて書きなおしてみよう．

まず E_i はある直交座標系からみた電場の強さの成分とする．直交座標系 $(x^1\ x^2\ x^3)$ の選びかたにはよらない2次ならびに1次の微分形式

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$\text{および}\quad E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$$

を任意の曲線座標系（これも再び，x^i で表わすことにするが，混同しないように！）に移せば，

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad \text{および} \quad E_i dx^i$$

となる．E_i は同じ共変ベクトル場をこの曲線座標系からみたときの成分を示す．この E_i からつぎのような成分をもつ反変ベクトル密度が作られる：

$$\boldsymbol{E}^i = \sqrt{g} \cdot g^{ik} E_k \qquad (g = \det(g_{ik})).$$

ポテンシャル φ は，曲線座標系へ，ひとつのスカラーとして移される．しかし電荷密度 ρ は，任意の空間領域内に含まれる電荷の総量が，この領域にわたって積分された $\int \rho dx^1 dx^2 dx^3$ に等しくなるように定義する．それゆえ ρ はスカラーではなく，ひとつのスカラー密度となる．そこで基礎方程式は

$$\left.\begin{array}{l} E_i = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i},\ \text{あるいは}\quad \dfrac{\partial E_k}{\partial x^i} - \dfrac{\partial E_i}{\partial x^k} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \boldsymbol{E}^i}{\partial x^i} = \rho. \\ \text{また} \\ \boldsymbol{S}_i^k = E_i \boldsymbol{E}^k - \dfrac{1}{2}\delta_i^k \boldsymbol{S},\ \text{ここで}\quad \boldsymbol{S} = E_i \boldsymbol{E}^i. \end{array}\right\} \quad (65)$$

この $\boldsymbol{S}_i^k$ は 2 階混合テンソル密度であり，これは電場の張力テンソル密度を示す．これらの式が正しいことを証明するにはただつぎのことに注意すればよい．ここにかかれた式はすべて座標変換に対する不変な性質をもっている．そこで特に直交座標系を用いて，その正否を確かめればよいが，その点については既に証明ずみである．

定常電流による磁場は，直交座標系では，ひとつの不変な反対称双一次形式 $H_{ik}dx^i\delta x^k$ で表わされる．これを任意の曲線座標系に移すことによって，H_{ik} は一般座標変換に対する 2 階線形テンソルの共変成分となる．これが磁場を示すテンソルである．まったく同様にベクトル・ポテンシャルの成分 φ_i も任意の曲線座標系からみた共変ベクトルの成分にかわる．さらに H_{ik} から 2 階反変テンソル密度 $\boldsymbol{H}^{ik}$ をつぎの式によって定義する：

$$\boldsymbol{H}^{ik} = \sqrt{g}\cdot g^{i\alpha} g^{k\beta} H_{\alpha\beta}.$$

これらを用いて基礎方程式はつぎのように表わされる：

$$\left.\begin{aligned} H_{ik} &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \\ \text{または}\quad & \frac{\partial H_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial x^l} = 0, \\ & \frac{\partial \boldsymbol{H}^{ik}}{\partial x^k} = \boldsymbol{s}^i, \\ \boldsymbol{S}_i^k &= H_{ir}\boldsymbol{H}^{kr} - \frac{1}{2}\delta_i^k \boldsymbol{S}, \quad \text{ここに } \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}H_{ik}\boldsymbol{H}^{ik} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

$\boldsymbol{s}^i$ は電流の強さを示すベクトル密度である．また $\boldsymbol{S}_i^k$ は電場のそれとまったく同じ性質の量で，磁場の張力テンソル密度を示す．上の諸式を，たとえば球座標や円筒座標を用いて具体的に書いてみせることは容易である．それにはごく近接した2点の間の距離 ds^2 をこれらの具体的な座標系を使って書いてみればよい．このことは微分幾何学的考察から容易に計算できる．

ところで，(65)，(66) に関して原理的にきわめて重要なことはつぎの点である．いまなにかの理由から，物理学的空間に対してユークリッド幾何学を放棄し，他の計量基本形式をもったリーマン幾何学におきかえる必要がおこった場合に，定常的電磁場の基礎方程式をどのように変更したらよいかについて，(65)，(66) はその解答をわれわれに示しているということである．なんとなれば，そのような一般的な幾何学のもとでも，(65)，(66) は，“客観的”というその不変な性質のために，基準にとる座標系に無関係に，電荷，電流と電磁場の間の関係についての法則をわれ

われに示してくれる．これらが，ユークリッド空間における定常的電磁場の法則をきわめて自然に拡張したものであるということについては，なんら，疑問の余地もない．しかもこの一般の場合への翻訳が一般のテンソル解析から，きわめて簡単に，またきわめて自然に生まれてきたことはまったく驚くべきことである．われわれの空間がユークリッド的であるか否かという質問は，電磁場の法則に関するかぎり完全にどちらでもよいことである．“ユークリッド的”ということは，一般座標変換に対する不変な形式では，g_{ik} に対する 2 階微分方程式によって表現される（すなわち曲率＝0 という方程式）．これに対して (65)，(66) ではただ，g_{ik} 自身およびその 1 階微係数が登場した．——しかしここで注意すべきことは，上述のような一般の幾何学のなりたつ場合への簡単な拡張はただ**近接作用の法則**に対してのみ可能であるということである．リーマン空間において近接作用の法則からクーロンやビオ－サヴァールの法則のような遠隔作用的法則を導きだすことはひとつのまったく数学的な問題である．それは本質的にはつぎの問題に帰着される：すなわち普通のポテンシャルの方程式 $\Delta\varphi=0$ のかわりに，リーマン空間では，これを一般変換に対して不変な形に拡張した方程式（(65) 参照）

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)=0$$

が登場する．これは φ に対する線形 2 階微分方程式ではあるが，ユークリッド空間のそれとは異なり，係数はもはや

定数ではない．これを解いて，任意の与えられた1点で無限大になる“基本解”を求めねばならない．この解は普通の場合の基本解 $\frac{1}{r}$ に相当するものである．しかしこのような解を求めることは数学的には困難な問題である．それは2階線形偏微分方程式論で扱われている．これに似た問題はユークリッド空間においてもすでに出会ったことがある．すなわち真空中の問題のかわりに，一様でない媒質（たとえば誘電率が場所によって変わるような媒質）のなかにおけるポテンシャルを求めるという問題が，まさにこれと似たものである．――電磁場の法則を，非リーマン的距離空間におけるそれへ拡張することは，後に示されるように，無意味なことである．というのは，そのような空間の計量場は既にその一部として，重力場のみならず電磁場をも含んでいるからである．

リーマン空間における最短曲線　一般の計量空間では二つのベクトル ξ^i, η^i は平行移動に際して

$$d(\xi_i \eta^i) + (\xi_i \eta^i) d\varphi = 0$$

がなりたつ．特にリーマン空間では，この左辺第2項は0となる．その結果，リーマン空間では，ひとつの共変ベクトル ξ の平行移動をその共変成分 ξ_i を使って書きあらわすのとおなじように，$\xi^i = g^{ik}\xi_k$ を使っても表現できる：

$$d\xi_i - \left\{\begin{matrix} i\alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} dx^\alpha \xi_\beta = 0$$

$$\text{または} \quad d\xi_i - \begin{bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{bmatrix} dx^\alpha \xi^\beta = 0.$$

そこでひとつの並進 $x^i = x^i(s)$ に対してはつぎの式がなりたつ：

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} u^\alpha u^\beta = 0, \quad \left(u^i = \frac{dx^i}{ds}, \ u_i = g_{ik} u^k\right). \tag{67}$$

なんとなれば (19) により

$$\begin{bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

そこで $(\alpha\beta)$ について対称な任意の量 $\boldsymbol{t}^{\alpha\beta}$ について

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \boldsymbol{t}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \boldsymbol{t}^{\alpha\beta} = \left\{\begin{matrix} i\alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} \boldsymbol{t}^\alpha_\beta. \tag{68}$$

これを (67) のすぐ上の式と比べれば，(67) のなりたつことがわかる．速度ベクトルの“大きさ”(の計量値) は，並進にさいしては〔つまり，(67) で示される曲線にそって常に〕その値が変わらないから

$$g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = u_i u^i = \text{一定（曲線上のどの場所でも）} \tag{69}$$

がなりたつ．

さて簡単のために計量基本形式が正定符号であるとする．そのときは任意の曲線 $x^i = x^i(s)$ $[a \leqq s \leqq b]$ は，パラメーター s のとりかたに無関係な一定の“**長さ**”をもつ．

それは

$$\int_a^b \sqrt{Q}\cdot ds \qquad \left(Q = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right)$$

であたえられる．もしパラメーター s として曲線の長さ自身を使えば $Q=1$ となる．そこで (69) はわれわれにつぎのことを教えてくれる：並進 $x^i=x^i(s)$ では，その軌道曲線，つまり測地線にそって，その速度は常に一定である．いいかえれば，並進運動によって，点が経過した部分の（曲線の）長さはその時間 s に比例する．リーマン空間においては測地線は，その方向が常に不変に保たれるという微分的特性ばかりでなく，測地線の任意の部分をとりだして考えるとき，その**部分の両端を結ぶ最短の曲線が測地線であるという**積分的特徴ももっている．しかしここに述べたことは，その言葉通りに理解してはならない．むしろ，つぎの例の場合と同じように理解すべきである：たとえば力学で，平衡状態においてはポテンシャル・エネルギーが**極小**であるという．あるいは 2 変数 x, y のひとつの関数を $f(x,y)$ とする．いま

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

がある (x,y) の値に対して，dx, dy につき恒等的に 0 となるとき，点 (x,y) において f は**極小**であるという．しかし実際には，これは，その点で“定常値”（または停留値）をとるというべきである．というのは，その点で極小になる場合もあるが，また極大値をとる場合や，またそこが鞍部

点となる例もあるからである．測地線もまた必ずしも最短曲線とは限らない．むしろ長さについて定常的な曲線というべきである．たとえば球面上では大円の円弧が球面上の測地線である．いまひとつの大円上に任意に2点A，Bをとれば，大円は二つの部分に分かれる．この短い方が，ABを結ぶ最短曲線であることはたしかである．しかしもう一方の部分もまた大円の一部だから，ABを結ぶ測地線になっているが，これはABを結ぶ最短曲線ではない．ただし長さについては定常的である．——この機会に無限小変分の原理を厳密な形式で述べることにしよう．

いま任意のひとつの曲線がつぎのようなパラメーター表示で与えられたとする：

$$x^i = x^i(s), \qquad (a \leqq s \leqq b).$$

これを仮に“始曲線”（Ausgangskurve）と呼ぶことにする．ここで s のほかに，もう1個のパラメーター ε に依存する曲線のひとつの集合を考える．すなわちこれに属する任意の曲線は

$$x^i = x^i(s;\varepsilon), \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

で表わされる．パラメーター ε は，$\varepsilon=0$ を含むある小変域をもち，特に $\varepsilon=0$ では $x^i(s;\varepsilon)$ は $x^i(s)$ に一致するものとする．またこの集合に属する曲線はすべて，同じ始点および終点をもつものとする，つまり $x^i(a;\varepsilon)$，$x^i(b;\varepsilon)$ は ε に無関係とする．ひとつのこのような曲線の長さは

$$L(\varepsilon) = \int_a^b \sqrt{Q}ds$$

であたえられる．ここでパラメーター s としては，"始曲線" の長さを採用する．したがって $\varepsilon=0$ に対しては $Q=1$ である．曲線の方向 $\dfrac{dx^i}{ds}$ は始曲線に対しては，つまり $\varepsilon=0$ のときは，特にこれを u^i をもって表わす．さらに

$$\varepsilon\cdot\left(\frac{dx^i}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\xi^i(s)=\delta x^i$$

と記す．これは ε を無限小としたとき始曲線上の点 (s) の無限小変位を示し，これによって始曲線は，そのすぐ隣りの曲線に移される．しかし δx^i は曲線の両端では 0 となる．また

$$\varepsilon\cdot\left(\frac{dL}{d\varepsilon}\right)=\delta L$$

は上の変位にともなう曲線の長さの変化を示す．そこで始曲線がその長さについて定常的であるための条件は $\delta L=0$ である．δQ という記号を δL と同様の意味に使えば，

$$\delta L=\int_a^b\frac{\delta Q}{2\sqrt{Q}}ds=\frac{1}{2}\int_a^b\delta Q\cdot ds. \tag{70}$$

なんとなれば始曲線に対しては $Q=1$ であるから．ところで

$$\frac{dQ}{d\varepsilon}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\cdot\frac{dx^i}{d\varepsilon}\cdot\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds}+2g_{ik}\frac{dx^k}{ds}\cdot\frac{d^2x^i}{d\varepsilon ds}.$$

右辺第 2 項の変分と微分の順序をいれかえる，つまり ε と s の微分の順序をいれかえると，

$$\delta Q=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}u^\alpha u^\beta\xi^i+2g_{ik}u^k\frac{d\xi^i}{ds}.$$

これを（70）に代入し，ξ^i が積分域の両端で 0 になることを留意してこの第 2 項を部分積分すると

$$\delta L=\int_a^b\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}u^\alpha u^\beta-\frac{du_i}{ds}\right)\cdot\xi^i ds$$

となる．そこで（67）がなりたつときにかぎり，任意の変位 ξ^i に対して $\delta L=0$ が成立する．もし仮に，a，b の間のある値 $s=s_0$ において，上の被積分関数 $(\quad)_i$ が，たとえば $i=1$ としたとき，>0 になったとしよう．そのときは，s_0 の近傍にごく小さな領域を考えれば，そこでは $(\quad)_{i=1}$ は常に >0 となる．そこでいま $\xi^1(s)$ として，s がこの領域以外にあるときは 0 になるような，負値をとらない s の関数を採用する．また他の ξ^i $(i\neq 1)$ はすべて恒等的に 0 とおく．このようにすれば $\delta L>0$ となり，定常値の条件に矛盾する．

なおこの証明からつぎのことがいえる．同じ時間（$a\leqq s\leqq b$）のあいだに同じ始点を出発して，同じ終点に達するすべての“運動”のなかで，積分

$$\int_a^b Q ds$$

の値を定常にさせるものが**並進**（運動）である．

今まで述べたことについて，なるべく直観的に理解しやすいように，その説明について私は努力したつもりだが，それにもかかわらず，無限小幾何学の基本的考えかたが，数式や添字の洪水によって水びたしにされ，かくされてしまい，その結果，読者をしばしば困却させたと思う．まっ

たく形式的なことにこれほど永い間，努力を傾け，またその説明にこれほど多数のページを費さねばならなかったことは，まことに遺憾ではあるが，しかしそれをしないわけにはいかなかった．すべての言葉や文字も，それを使って自由に，われわれの考えを発表できるようになるには，前もってそれらを苦労して習得しなければならない．これと同様に数式からのわずらわしさを払いのける唯一の道は，逆に，テンソル解析という道具を意のままに使いこなせるまでに練習し，その結果，われわれのとりくむべき真の問題に，何の苦労もなく，この道具を応用できるようになることである．ここにいう真の問題とは，空間，時間，および物質が，この客観的現実世界の構成に関与しているかぎりにおいて，それらの本質に対する洞察を得るということである．このような目的を目指す者にとっては，“数学は常に自明である”といえるようでなければならない．さてここで，永い準備の後，完全な装備をもって，アインシュタインの天才がわれわれに示してくれた道にそって，物理学の世界へいよいよ旅だつ前に，なお空間の計量についてのより深い理解を得るために，もうしばらく，この問題に立ちいろう．それはピタゴラスの定理により表わされているような，計量的構造の内的必然性と唯一性を理解することがその目的である．

§ 19　計量の群論的解釈

平行移動の概念に関連して§15の冒頭で，提示された要請（それによれば，平行移動は，ベクトルをある意味で不変のまま移動させることと定義されている）はアフィン接続の性質を完全に，また一意的に決定してしまう．それゆえアフィン接続の性質に関してはもはや，なんらの謎も残されていない．しかし計量については，われわれの経験以上には，いかなる観点もまだもちあわせない．計量（あるいは距離といってもよい）が，微分の二次形式によって書きあらわされることをひとつの事実としてわれわれは受けとっているが，その意味を理解しているわけではない．既にリーマンは，計量基本形式として，われわれの知っている二次形式のかわりに，微分量 dx の 4 次の同次式を採用してもかまわないし，あるいはまったくちがった形の関数を用いることも許されることを示した．さらに基本形式は微分量 dx の有理関数である必要のないことまで指摘した．しかしそれでもわれわれは二次形式を用いることをやめなかった．元来，また一般的に，1 点 P における計量を規定するものは**回転群**である．1 点 P におけるベクトル体（すなわちその点におけるすべてのベクトルの全体）の自分自身への線形写像のなかで，なにをもって**合同写像**とするかを知ったとき，点 P における多様体の計量的性質がきまったことになる．本質的に異なる種類の一次変換群が多数存在するように，それと同じだけ多数の別種の計量が存在す

る（ここで本質的に異なる群というのは，単に座標系のとり方の違いに起因するようなものではない）．従来もっぱら研究されたピタゴラス的計量に対しては，すべての一次変換のなかから，特に回転群が選び出される．この群は基本二次形式を自分自身に写像する一次変換の集合である．しかし回転群は一般には不変量（すなわち任意のベクトルに依存するただ1個の関数で，しかもすべての回転にさいしてその値がかわらないもの）を持つ必要はない．

さてこの回転の概念に対して，どのような要請を付け加えることが最も自然であるか考えてみよう！　多様体に対してまだ計量が規定していないときは，多様体内の個々の点における n 次元平行多面体の大きさだけが互いに比較できる量である．$\boldsymbol{a}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ を任意のベクトルとする．これはそこにある基礎ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_i = a_i^k \boldsymbol{e}_k$$

で表わされるとする．a_i^k の行列式を，グラスマン（Grassmann）に従って

$$\frac{[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n]}{[\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n]}$$

としるすことにする．これは定義により n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の張る平行多面体の体積である．もし基礎ベクトルとして他の系 $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ を採用すれば，すべての体積は共通の定数因数がかけられる．それは“行列式のかけ算”の規則に従って

$$\frac{[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_n]}{[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\cdots\boldsymbol{e}_n]}=\frac{[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_n]}{[\bar{\boldsymbol{e}}_1\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdots\bar{\boldsymbol{e}}_n]}\cdot\frac{[\bar{\boldsymbol{e}}_1\bar{\boldsymbol{e}}_2\cdots\bar{\boldsymbol{e}}_n]}{[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\cdots\boldsymbol{e}_n]}$$

となる．したがって体積は，その単位をきめたならば，座標系のとりかたに無関係に，一意的に決定される[10)]．そこで回転に対して，回転はベクトル体を“変化させてはならない”から，それは体積を不変にたもつひとつの写像であると要請する．ベクトル $\boldsymbol{x}=(\xi^i)$ を $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{\xi}^i)$ に移す回転は

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i=a_i^k\boldsymbol{e}_k \quad \text{または} \quad \xi^i=a_k^i\bar{\xi}^k$$

によって表わされる．ここで体積を不変にするという要請から，回転のマトリックス (a_k^i)〔これと $\boldsymbol{a}_i=a_i^k\boldsymbol{e}_k$ の係数とは同じ記号になっているが，別に関係はないから，混同しないように注意されたい：訳者〕の行列式は 1 に等しい．そこでこの要請を個々の回転につけ加えれば，このような一次変換の全体はひとつの群となる．しかもこの群はひと

10）訳者注：いま n 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$，をきめ，これらの張る平行多面体の体積を単位にえらぶ．したがって，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ の体積は，この単位を用いれば

$$\frac{[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]}{[\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_n]}\Bigg/\frac{[\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_n]}{[\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_n]}.$$

もし座標系を $(\boldsymbol{e}_i)$ から $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ に変えれば，本文の説明にしたがって，上式の分母，分子に共通の因数がかかるだけで，その比は不変である．実際上式は，行列式のかけ算の規則により

$$\frac{[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]}{[\boldsymbol{u}_1\cdots\boldsymbol{u}_n]}$$

となるから，これが座標系 $(\boldsymbol{e}_i)$ のとりかたに無関係なことは一目瞭然である．

つの連続群である．すなわち個々の回転は，多次元連続多様体のひとつの要素として表現される．

いま座標系 $(\boldsymbol{e}_i)$ を用いたとき，ひとつの線形ベクトル写像が行列 $A=(a^i_k)$ で表わされているとする．一方座標系 $(\boldsymbol{e}_i)$ を他の座標系 $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ にかえるとき，すなわち

$$U : \bar{\boldsymbol{e}}_i = u^k_i \boldsymbol{e}_k \tag{71}$$

で定義された新座標系 $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ に移れば，もとの行列 A は UAU^{-1}（U^{-1} は U の逆行列を示す．すなわち $UU^{-1}=U^{-1}U=E=$ 単位行列）に変わる．ところでひとつの行列群 $\boldsymbol{G}$ が与えられているとする．いま任意のひとつの行列 U（U^{-1} も存在すると仮定する．しかしこの U は（71）の U とは無関係）を用いて，$\boldsymbol{G}$ のすべての要素 G に，UGU^{-1} という操作をほどこすこと（ただし，すべての G に対して U は共通のただひとつのものを使う）によって，新たに生れた群（その要素はすべて UGU^{-1} の形をしている）は，基準にとる座標系を適当に変更すれば，必ずもとの $\boldsymbol{G}$ と一致させることができる．このような群 $\boldsymbol{UGU^{-1}}$ を $\boldsymbol{G}$ と同種の群という．またはそれは $\boldsymbol{G}$ とただその“方向”が異なるにすぎないといわれる．いま $\boldsymbol{G}$ は点 P における回転マトリックスの群とする．さらに $\boldsymbol{UGU^{-1}}$ が $\boldsymbol{G}$ と等しい（このことは $\boldsymbol{G}$ の任意の要素 G に対して $G=UGU^{-1}$ であるということを要求しているのではない．$\boldsymbol{G}$ のすべての要素 G に対して UGU^{-1} もまた $\boldsymbol{G}$ の要素であることが要求されているにすぎない）ならば，（71）のように U で結ばれた二つの座標系 $(\boldsymbol{e}_i)$ と $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ のそれぞれにおける計量は

同じように表現される．つまりこのような U は，P におけるすべての計量的関係を不変に保ちつつ，その点におけるベクトル体を自分自身の上に写像するマトリックスである．これが**相似写像**（ähnliche Abbildung）の概念である．$\boldsymbol{G}$ は，相似写像群 $\boldsymbol{G}^*$ のひとつの部分群である．

いままで多様体内の個々の点における“計量”について述べたが，つぎに，**“計量接続”**（metrische Zusammenhang）という概念に移ろう．いまある点 $\mathrm{P}_0=(\overset{0}{x}{}^i)$ とこれの無限小近傍にある任意の点 $\mathrm{P}=(\overset{0}{x}{}^i+dx^i)$ を考える．P_0 におけるベクトル体から P におけるベクトル体への線形写像がひとつの合同移同であることがわかったとき，点 P_0 とその近傍との計量接続が与えられたという．もしある 1 点における計量に関する群論的性質が，計量接続にまで拡張されるときは，そのなかにはつぎのような要請がふくまれる：

1）いま P_0 から，これにごく近接した他のきまった点 P への合同移動を考えよう．P_0 から P へのすべての合同移動 A は，任意のひとつのこのような合同移動 A_0 から，$A=A_0G_0$（まず回転 G_0 を行なってから，A_0 により P まで合同移動させる）によって作られる．ここに G_0 は点 P_0 における任意の回転を示す．つまり G_0 が，P_0 における回転群 $\boldsymbol{G}_0$ のすべての要素を一巡すれば，上の式によってすべての合同移動 A が作り出される．ここでさらに，中心 P_0 に属するベクトル体を考える．このベクトル体を張る二つの基礎ベクトル系 $(\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i)$ と $(\overset{0}{\bar{\boldsymbol{e}}}_i)$ は互いに合同，つまり P_0 における回転 G_0 によって一方から他方が導かれるもの

とする．いまこのベクトル体に合同移動 A_0 をほどこして，Pまで移したとする．その結果，P_0 の座標系 $(\overset{0}{\boldsymbol{e}}_i)$，$(\overset{0}{\bar{\boldsymbol{e}}}_i)$ が，それぞれPにおける $(\boldsymbol{e}_i)$，$(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ に移ったとすれば，$(\boldsymbol{e}_i)$ と $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ は互いに合同となる．すなわちPにおける適当な回転によって，$(\boldsymbol{e}_i)$ を $(\bar{\boldsymbol{e}}_i)$ に変換することが必ずできる．そこでPにおける回転群 $\boldsymbol{G}$ は $A_0\boldsymbol{G}_0A_0^{-1}$ に等しい．——したがって計量接続を仮定すれば，Pにおける回転群と P_0 における群 $\boldsymbol{G}_0$ とは，"方向" だけが異なるにすぎないことになる．さらに多様体内で，点 P_0 から連続的に任意の他の点に移ることにより，多様体内のすべての点における回転群は皆同じ種類であることがわかる．このような観点から計量空間は一様である．

2) 点 P_0 と，その無限小近傍に属するすべての点との計量接続について：いま点 $\mathrm{P}_0=(\overset{0}{x}{}^i)$ から他の任意の点 $\mathrm{P}=(\overset{0}{x}{}^i+dx^i)$ に向かって変位 dx^i にともなうあるベクトルの無限小合同移動を行なうとする．さらにこれに続いて変位 δx にともなう第2の同様な移動を行なえば，その結果は，合成された変位 $dx^i+\delta x^i$ にともなう無限小合同移動に一致しなければならない．ところで任意のベクトル ξ^i が合同移動されたとき，それによる ξ^i の変化 $d\xi^i$ が，ベクトルの中心（基点）の変位の成分 dx^i と同程度の無限小量であるとき，ξ^i の合同移動は無限小であるという．したがって，もし

$$d\xi^i=\varepsilon\cdot\sum_k \Lambda^i_{k1}\xi^k \qquad (\varepsilon=\text{無限小の定数})$$

が第1座標軸の方向へεだけ変位させたときのξの無限小合同移動を示すものとし［すなわち$P_0=(\overset{0}{x}{}^i)$から$(\overset{0}{x}{}^1+\varepsilon, \overset{0}{x}{}^2, \cdots, \overset{0}{x}{}^n)$ への移動]，また$\Lambda^i_{k2}, \Lambda^i_{k3}, \cdots, \Lambda^i_{kn}$ はそれぞれ，第2座標軸，…，第n座標軸の方向へεだけずらしたときの無限小合同移動の係数とすれば，

$$d\xi^i = \sum_{k,r} \Lambda^i_{kr} \xi^k dx^r \tag{72}$$

は，P_0の無限小近傍内のすべての点への“無限小合同移動の集団”をあたえる．

最後に上述のことに関連して，ここで私はつぎのことを想い起こしたい．§12によれば，任意の座標系には，ひとつの可能な，無限小平行移動の概念が所属する〔訳者注：本書上巻202–203ページ参照〕．つまり点P_0におけるベクトル体の，（P_0からこれにごく近接したすべての点への）無限小平行移動のひとつの集団が所属するということである．

いままで私が述べてきたことは，単なる概念の分析であった．すなわち計量とか，計量的接続，あるいは平行移動という概念そのものの中に含まれているものについての説明であった [18]．そこでこれから，カントのいう意味での“総合”的な部分に話をすすめよう．われわれは種々の異なる計量空間のなかから，ピタゴラスやリーマンの考えにしたがって，われわれの現実の空間が所属するただひとつの特別な距離空間を，内的に簡単な特性によって選び出すことにしよう．空間内のどこの点でも回転群の性質が変らない

ということは空間の計量に関する本質の特徴である．しかし空間の計量的本質は，空間内の各点を結ぶ計量接続[11]を規定しない．したがってまた，多様体内の各点における回転群の相対的方向を決定しない．後者はむしろ空間内に在る物質的な内蔵物に依存し，したがって元来，先験的にきめられているものではなく，それ自身，自由に任意に変化しうるものである．そこでわれわれの第一の要請はつぎのようなものである（自由に対する仮定）．

I　**空間の本質は計量接続に制限を加えない**　これはつぎのことを意味する．すなわち1点 P_0 において回転群が与えられているとする．一方（72）の係数 Λ^i_{kr} は任意に与えられているとし，（72）は点 $P_0=(\overset{0}{x}{}^i)$ から，これに近接した点 $P=(\overset{0}{x}{}^i+dx^i)$ の方向への合同移動の集団をあたえるものとする．したがって P_0 とその近傍は計量的に接続されていることになる．係数 Λ で規定される計量接続は P_0 における回転群により制限をこうむることなく，これらは両立しうるということが要請Iの意味である．

つぎに単なる概念の分析をのりこえて，これから第二の要請をのべよう．それは合同移動と平行移動の関係に関するものである．その内容はさきに，私が微分幾何学の基本的事実と呼んだこと（本書上巻268ページ参照）と同じである．すなわち計量接続は要請Iにより，まったく自由に，定量的にそれ（つまり接続の係数の値）をきめることがで

11）　これもまた，後に説明されるように，いたるところ同じ性質のものである．

きる．そこでもしそれをひとたび決定すると，**平行移動の集団**[12]**の種々の可能なタイプのなかには，ここに与えられた合同移動の定義にも合致する，特別なただひとつのタイプの平行移動の集団が必ず存在する**．その結果，P_0 から P（P_0 の無限小近傍にある任意の点）への（P_0 にある）ベクトル体の無限小合同移動のなかで，ただひとつの特別な移動，つまり**並進**（この移動の速度ベクトルは合同に移されるから大きさは不変だが，同時に上述のことから自分自身に対する平行移動になっているから，これは並進である）がえらび出されたことになる．この並進は特に P_0 と P が同一点のときは，恒等変換となる．ここでこの要請をつぎのような簡単な形にまとめることができる．

II　**計量接続はアフィン接続を一意的に決定する．**

われわれの要請には，点 P_0 における無限小回転の集合に関する不変的，つまり座標系のとりかたによらない，あ

12）　訳者注：本書上巻 202-204 ページでも述べたように，ある座標系をきめたとき，それを基準にした場合，点 P_0 にあるベクトルの各成分が，隣接点 P まで不変に移される時，この移動をベクトルの平行移動と定義すれば，このような平行移動は座標系ごとにひとつずつ定義される．そればかりでなく，P_0 はきめられていても，P の選び方には無限通りある．そこで各々の P ごとにベクトルはそれぞれ異なる移動をこうむる．この意味で，座標系をひとつきめると，一組の平行移動の集団がこれに対応して定義される．本文にいう集団とはこの意味である．合同移動の集団についても，同様の意味に解すべきである．なお無限に多数ある平行移動の定義法のなかから，特別なものをえらび出すには，合同移動の要請を平行移動の条件に追加することにより実現される．

る事柄が含まれている．すなわちこの要請から，無限小回転に対して不変な，ひとつの縮退していない二次形式が存在することが導かれる．実際，私には，この群論的法則，つまり不変二次形式の存在を証明することが可能である．また空間の問題に関して，ここに主張されているような考えかたが正当であることについての論理的保証は，上述の群論的法則がなりたつということにより与えられるものと私は思う．しかしこの法則の数学的な証明は大変に複雑な面倒なもので，それをここに述べることは本書の立場からは行きすぎと思われるので，省略する [19].

最後に私はなお二つの点について注意しておきたい．まず公理（要請）II によれば，各点の計量ばかりでなく，計量接続までも，どこでも同じ性質であるということと，公理（あるいは要請）I とは決して矛盾するものではないということである．すなわち各点における計量接続は一般に考えうるもののなかで最も簡単なタイプの接続である．また各点には必ずつぎのような測地座標系が存在することになる．すなわちこの系を基準にとると，その点におけるすべてのベクトルの成分を変化させないまますぐ隣りの点まで移動させるとき，それは常にひとつの合同移動となる．注意したい第 2 の点はつぎのことである：（もしわれわれの分析が正しいならば）空間内のそれぞれの点における計量の方向，その量的規定さらに，計量接続，これらがすべて自由に変化しうるものであり，元来，ある特別な関係で，動かしがたいようにきめられているものではないと考えるこ

とによってはじめて，ピタゴラス的な計量の特に目だった性質が理解できるようになる．各点の計量が先験的に決定されているという考えはユークリッド的“遠隔幾何学”の特徴といえよう．ここで計量の“性質”と“方向”とはつぎのように互いに独立である．すなわち，各点における φ_i と g_{ik} はどちらも自由に互いに無関係に変化できる．ただし g_{ik} についてはひとつの制限がつく．g_{ik} を係数とする二次形式は縮退しないこと，また空間の性質からきまる慣性指数はどこでも一定であるという条件である．

第 II 章において試みられた空間についての研究は，私にとっては，現象学的哲学者フッサールの目ざした存在形式の分析（Wesensanalyse）に対するひとつのよい例であるように思われる．すなわち，それは非宿命的な存在の形式を扱った典型的な例である．そこでは，空間の問題についての歴史的発展が示すように，この現実の中にまきこまれたわれわれ人間にとって最終的な結論に到達することがいかにむずかしいかがわかる．永年にわたる数学的な発展，ユークリッドからリーマンにいたる幾何学的研究の偉大なる展開，ガリレイ以来の自然への挑戦と，自然法則の発見，および経験から与えられる，常に新たなる発見への原動力，最後に——ニュートン，ガウス，リーマン，アインシュタイン——これら偉大なる思想家の天才，以上にならべたすべてのものが，われわれが固執していた，表面的な，偶然的で非本質的な空間の特徴をわれわれから引きはなすのに必要であった．もちろん，ひとたび真の考えかたが得られ

れば，われわれの理性には光がさし，理性は，理性により“それ自身理解できるもの”を知り，またそれを承認する．(理性が，この問題の発展の全階段で常にそれに関与していたことはもちろんであるが) それにもかかわらず，一挙に問題を洞察し，解答を与えるだけの力を理性はもってはいなかった．理性に対するこのような非難は，たった一度の模範的な描写によって存在の形式を適当に表現できると信じていた哲学者の浅慮にこそ向けられるべきであろう．原則としては彼等は正しいが，人間的には失敗である．なお空間のこの例は現象学のつぎのような質問（それは私には，本来，決定的なものであるように思われる）にとってきわめて教育的である．その質問とは，われわれの意識に登場する実在の部分が，与えられた物それ自体に固有な構造をどこまで表現するか，またこの意識の中の実在の部分にはどの程度，われわれの習慣が関与しているかという問題である．

第III章　空間および時間の相対性

§ 20　ガリレイの相対性原理

ひとつの時計を用いて時間をどのようにして測るか，また任意に時間の原点と時間の単位がきめられた場合に，各時刻が数 t をもって表示できることをすでに序論で述べた．しかし空間と時間を統一することには，なお新しい困難な問題が存在する．それは相対性理論の扱うべき問題である．この解決は人間の精神の歴史のなかの最大の出来事のひとつといえる．この出来事に関与した人々のなかでは特に，コペルニクスとアインシュタインの名をあげねばならないであろう [1].

時間に対しては，われわれは時間計算の起点と時間の単位を任意にきめることができる．これらの一方または他方を変えると，任意の時刻の時間座標 t はそれぞれ

$$t = t' + a\,; \quad \text{ならびに} \quad t = \alpha t' \qquad (a, \alpha \text{ は定数で } \alpha > 0) \tag{I}$$

のように変換される．空間についてはこの章では再び，ユークリッド的と仮定しよう．その場合には空間の中に，原点，

長さの単位，直交座標系の方向を任意にとることができる．これらのどれかひとつを変更すると，任意の空間点の空間座標 x^1, x^2, x^3 は

$$x^i = x^{i'} + a^i \quad \text{ならびに} \quad x^i = \gamma x^{i'}, \tag{I}$$

あるいは

$$x^i = \sum_k \alpha^i_k x^{k'} \tag{I}$$

なる変換をこうむる．ただしこの最後の変換に対しては，二次形式 $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ は不変である（ここで a^i, $\alpha^i_k \gamma$ は定数で $\gamma > 0$）．もしわれわれが空間と時間の融合について何も考えないならば，空間は空間自身，時間は時間自身として扱われる．そこで座標系は上に列挙された要素，(t, x^1, x^2, x^3) から構成される．それは任意の事件を空間的に，または時間的に，数量を用いて限定するために，つまり空間および時間の中におけるその事件の位置を，数字によって決定するために必要である．このような座標系が二つあったとき，これらはその内的な性質に差はないから，互いに同等で，どちらも座標系として役だち，その間に優劣はない．そこで，数学的に公式化された自然法則（そこでは空間および時間座標が独立変数として登場する）は上に述べた種々の変換や，それらを結合したすべての変換に対して不変である．このような変換の全体はひとつの群をなす．この群を空間および時間の**基本群**（elementare Gruppe）とよぶことにする．

ここでグラフ的に図示できるように，空間のひとつの次

元をはぶくことにする．したがって現象はすべて平面のなかで起こるものと考える．いま空間と時間に対してひとつの座標系 (x^1, x^2, t) が選ばれたとする．われわれは事件（点）の経過をグラフに示すことができる．そのためにグラフを描く図示空間の中に直交する座標軸を設ける．ある事件の空間的，時間的位置（あるいは簡単に世界の中の位置という）を

“場所：座標 x^1, x^2をもつ空間点，時刻：t”

とすれば，それは図示空間のなかの座標 (x^1, x^2, t) をもつ1点で表示される．ここで時間軸は空間軸（の決定する平面）に，たとえば直交するように選んであるとする．すべての運動する質点については，この図示空間のなかにその質点の旅行時間表をグラフで描くことができる．すなわち個々の質点の運動は1本の“世界線”で表わされる．その方向は常に t-軸の正の向きをさす．また静止している質点の世界線は t-軸に平行な直線である．一様な並進運動をしている1個の質点の世界線もまたひとつの直線である．$t=$一定 という切口の上の点から，その瞬間におけるすべての質点の空間的位置を読みとることができる．二つの質点は，もしそれらの世界線が交われば，両者は衝突する．二つの事件が同時刻におきたとき，これらを示す世界点の像点は，ひとつの同じ水平面内に在る．現実の空間・時間の中に，今まで用いていた座標系とは別の新しい直交座標系を設け，ある世界点の新しい座標を $(x^{1\prime}, x^{2\prime}, t')$ とする．一方図示空間の中にも，これに対応して適当に新しいアフ

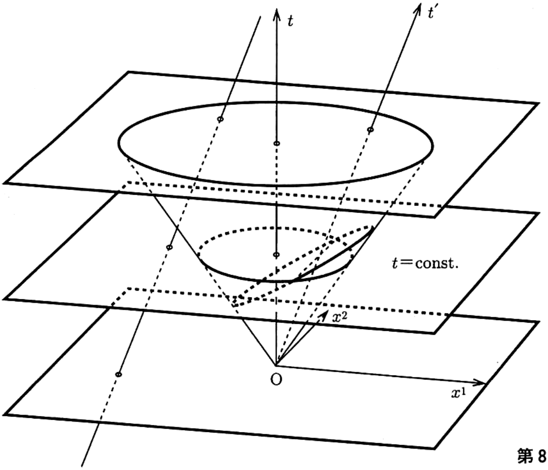
ィン座標系を設けて，上述の世界点に対応する図示空間中の像点の新座標も $(x^{1\prime}, x^{2\prime}, t')$ となるようにアフィン座標系を設置することができる．このアフィン座標系は，図示空間内にもともとあった直交座標系から，1）原点の変更，2）水平面内にある直交座標軸を他のものでおきかえる．3）時間の単位の変更（ただし時間軸の向きは変えない）を適当に組み合わせて行なうことにより導かれる．したがって図示空間は現実の世界のひとつの写像にはちがいないが，それはアフィン変換に対して不変な写像である．しかしこの写像は現実の空間の計量的構造を正しく再現するものではない．すなわち図示空間内にあるすべての直交座標が同等なものとして扱われるのではなく，上述のような変換によって互いに結ばれるすべてのアフィン座標系は互いに同等な系として扱われる．

さて“空間”だけについての写像とか，“時間”のみに関する写像でなく，上述のような“世界”に対する写像，つまり“空間と時間”を一緒にしたもののグラフ的写像について考えることをひとたび学ぶとき，われわれは，空間と時間のこのような融合がひとつの原理的な前提にもとづいていることにすぐ気がつく．すなわち“二つの事件が，たとえ時刻は異なっても，同じ場所に起きた”，あるいは“二つの事件が，たとえ場所は異なっても，同じ時刻に起きた”という言葉は，客観的な，また世界の構造にもとづいた意味をもつものであるという仮定である〔この二つの言葉は，ここに扱っているような座標変換に対して不変な意

味をもつということ：訳者〕．すべての空間，時間的に完全に局所的な事件，例えば小さな火花が瞬間的に閃光を発してすぐ消えるといった現象はひとつのきまった空間・時間点（略して時空点）すなわち世界点において起こる．すなわち，“ここでただ今”ある局所的事件が起きたといわれる．時空（空間と時間の融合されたものを今後，時空あるいは世界と呼ぶことにする）内の二つの事件が同じ時空点（またはごく近接した2個の時空点）で起きたということは，ひとつの明瞭な客観的意味をもつことである．しかし“これらの事件が別々の場所で，ただ時間的にのみ同時刻に起きた”とか，また“異なった時刻に同じ場所で起きた”ということは，元来は明らかな意味をもつものとはいえない．ひとつの時計は，この時計と同じ場所で起きた事件の時間的経過の直接の測定だけが可能である．しかしわれわれは，“同時刻”という概念の絶対性を根拠として，空間のなかのある場所で測定された時刻を空間の全体にひろげることができる．また任意の事件の空間座標は，永久に固定されたひとつの直交座標軸（たとえば壁の角）を基準として決定される．しかしある瞬間に設置されたこのような直交座標軸が，それ以降のいかなる時刻にも座標軸として使えるためには，この座標軸が客観的に静止している場合にかぎる．ここに強調された仮定は世界にひとつの構造を与えることになる．すなわち，この仮定は，われわれの図示空間では互いに平行な水平面の集団と，これに直交する平行な直線群によって表現される．——1本の糸でつら

ぬかれた多数の紙の積みかさね，つまり紙たばを想像すればよい——この仮定をわれわれは，**絶対時間，および絶対空間**の仮定とよぶことにする．これに対して，われわれは三つの異なる立場を考えることができる．

第一の立場は，たいていの人が持つ考えかたである．すなわち上の絶対時間，絶対空間の仮定には特に，自明でないような仮説は含まれていない，いわば当然の主張であると考える立場である．第二の立場はニュートンの力学の基礎となった考えかたである．すなわち時空が上述のような構造をもつことは先験的に確かなことであるという考えかたである．しかしこの場合には，事件が同時刻に起きたか



第 8 図

否か，また同じ場所におきたか否かを判別する実際的な方法を見つけよという問題が生ずる．ニュートンの力学によれば，座標系の静止と，その一様運動を区別できるような力学的判別法は存在しないことが証明されるにもかかわらず，彼は絶対空間の仮定に固執した．第三の立場は，先入観をぬきにして，時空内に起こる諸現象のなかに時空の構造がどの程度まで，その姿を見せるか，空間と時間を互いに分離することが許されるかを検査できると考える立場である．そこでこれからつぎのようにわれわれの考えを進めてゆこう．

まず**客観的な“同時刻”**ということに対するわれわれの信念が，つぎのことに本来，もとづいていることは疑いの余地もない．すなわちわれわれがある物を見るとき，その物が知覚された場所に在った“時点”とは，われわれがその物を知覚した瞬間の時刻である．このようにしてよいということは自明であるとされている．そこでこの考えにもとづいてわれわれは**自己の時間**を，自分の視界の中にはいってくる全世界にまでひろげる．ところでこのような素朴な考え方は光の伝播速度が有限であることが発見されてからは，その立脚点を奪われることになったが，それでもなお客観的な同時刻という概念に固執することに対する二，三の根拠はある．いまわれわれの図示空間で世界点 O を通ってひとつの水平面を描けば，これは O より未来の世界と過去の世界を分離する．これは一体，どのような意味をもつのか？　いま O からあらゆる方向にすべての可能な速度を

もって弾丸を発射したとしよう．この場合，O より未来にあるいかなる世界点にも必ず弾丸が到達する．これに反して，O より過去にある点には弾丸は到達することはできない．まったく同様に世界点 O に起こった事件は，O より未来にある世界点で起こる事件に影響をあたえることができる．しかし O より過去に起きた事件には変化を与えたくても，あとの祭りである．世界点どうしの間の作用的関係に関する上述の水平面のもつ客観的意味が以上の説明から明らかになったと思う〔つまり，この説明のように作用という立場から，客観的な“同時刻の面”の存在が示される：訳者〕．二つの空間的場所 A, B の間で，瞬間的に一方の時間を他に移す，つまり B の時間を A のそれと一致させるには，A から B までとどく剛体の棒を用意して，A, B のどちらか一方をたたいて，相手に時間を知らせればよい．あるいは別の方法としてつぎのことが考えられる．すなわち A から B まで，懐中時計をもった人を派遣すればよい．もし結果が途中の道筋に無関係ならば，この方法で一意的な結果に到達することができる．すなわち二人の人にそれぞれ正しく進む時計を持たせる．これらの時計は出発前 A においてまず同じ時刻に合わせておく．両人はそれぞれ別の道をとおって B に向かい，B で再び両人が各自の時計の読みをくらべたとき，それらが一致していたとすれば，この方法で，時刻を A から B まで一意的に移すことが可能となる（すなわち A, B の時計を同時刻になるように調整できる）．日常生活の経験や実験物理学では非常に大きな精度

をもって，上述のことがなりたつごとが示されている．そこでわれわれは誰もこの客観的同時刻という命題を破棄しようとは思わない．実際，アインシュタイン以前には何人もこれについて疑いをいだいた者はなかった．また彼より以前には，これが特別な仮定であるということに気がついた者さえいなかった．

“静止”の客観的意義に対するわれわれの信念については上とまったく事情が異なる．静止に客観的意味があるとすることには，なんらの根拠もないことは，少し考えれば容易に明らかにされる[1]．もし私が，誰かと，今日と同じ場所で明日も会いましょうと約束したとするとき，それはつぎのことを意味する．同じ通りの同じ家の傍で，同じ物体的環境のなかで会いましょうということである（コペルニクスによれば，同じ通り，同じ家でも，それは宇宙の中では，今日と明日ではまったく異なる場所である）．この言葉には，われわれの幸福な環境のおかげで，明確な意味がある．すなわち，われわれの住む世界は本質的に安定した環境で，そこでは非常に多くの物を包括した恒久的な物（その状態は不変であるか，またはほとんど不変な物）の全体的運動だけが変化のすべてである．〔訳者注：上に述べた例では，家や，街は地面に対して相対的に静止しており，そのために，明日の再会の約束も意味がある．しかしこの家

1) このことについては，既にアリストテレスも明快な理解をもっていた．すなわち彼は，ある物体の“位置”とは，その物体と，それをとりまく他の物体の間の関係にほかならないと説明している．

や街は地球とともに，また地球上の多数の他の物とともに太陽のまわりを公転している．このような大きな物はそれ自身の表面の様子，すなわち街や家の様子を変えることもないし，また地球自身もほとんど永久にその形をかえない．起こりうる変化といえば，地球全体の公転とか自転である．これが本文でいう本質的に安定した環境である〕．また日常生活で，家は静かに立っている，あるいは，船は20ノットの速さで走っているというとき，われわれは常に，われわれの足もとにある地球を基準として，これらの言葉の意味を理解する．ここで再び平面内の現象について考えてみよう．いまこの平面の一部は剛体の板からできており，それ以外の部分はカラの空間とする．板は互いに質的に異なった標識でおおわれているとする．この板の上に起きた事件の場所を指定するには，それが起きた場所の標識にしるしをつければよい．このように直接，場所に印をつけるかわりに，間接的に，数をあたえることによって場所を指定することもできる．それには沢山の標識のかわりに，板に刻みこんだ縦，横の座標線と，ひとつの剛体の物さしが必要である．これは長さの単位の役目をする．このようなやりかたは，さらに，板のない部分にまで，場所の指示に適したいわば目に見えない標識を設置することを可能にする．しかしこのような方法をとるときはわれわれは常にひとつの剛体を基礎におく必要がある．一般に任意の物体の運動については，このような基準にとる剛体に対する物体の相対的運動だけが客観的な意味をもつ．上述のような物体を

基準にしたときの任意のひとつの世界点の座標と，同じような他の物体を基準にしたときの同じ世界点の座標の間の関係は本節の最初にあたえた公式（I）で与えられる．ただしいまは，（I）の a^i は時間座標 t の任意の連続関数でもかまわない．また α_k^i も t の任意の連続関数でよいが，t に対して恒等的に，直交関係を満足する必要がある．つまりいかなる時刻にも，$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ を不変にする必要がある．しかし γ は t に無関係の定数でなければならない．このような基準系の変更に際して，剛体の物さしは不変である．つまりこの物さしがある瞬間に長さの単位として選定されたならば，それはそれ以後，いかなる時刻にもその長さが変わらない．ここに述べた世界点の時空座標の変換の集合を**運動群**（kinematische Gruppe）と呼ぶことにする．いまわれわれの図示空間のなかで $t'=$ 一定，$x^{1'}=$ 一定，ならびに $x^{2'}=$ 一定 という面の集まりを描けば，この最初のもの，すなわち $t'=$ 一定 は，平面の集団で，これは $t=$ 一定 という平面の集団と全体として一致する．しかし残りの二つの面は一般に曲面である．つまりこの変換はもはや t, x^1, x^2 についての線形変換ではない．

上述のような事情から，質点系，例えば惑星の運動をしらべる際に，質点の空間座標が時間 t とともにどのように変化するかを示す関数 $x^i(t)$ が，できるだけ簡単な形になるようにするには，またはできるだけ簡単な法則に従うようにするには座標系をどのように選べばよいかが問題となる．この問題については有名なコペルニクスの発見がある．

またこれはケプラーにより特に深く研究された．その発見とはつぎのことである：惑星の運動の法則は，地球の上に静止した座標系を用いるよりは，ある特別な座標系を基準にした方が，非常に簡単な見とおしのよい形になるということである．彼が発見したこの事実は，地球の絶対的な意味に対する信仰から彼自身を解放した．またその結果，それは世界観にひとつの転換をもたらした．彼の考察したことは，ケプラーのそれと同じように，純粋に運動学的性質のものである．ニュートンは力学の基本法則ならびに万有引力の法則からケプラーの運動学的法則を導き出すことによって，彼等の研究を完成した．ニュートンの力学が，天体現象や地球上の問題において，どんなに輝かしく，その正当性を実証されたかをわれわれはよく知っている．われわれが教えられているように，ニュートンの力学の法則は，単に惑星系についてのみならず，普遍的になりたつものである．しかしそれは上述の運動群に対しては不変ではない．そこでニュートンの力学の法則を利用して，個々の具体例にとらわれない，絶対的な方法で座標系を確立することが可能になる．〔訳者注：ニュートンの力学の法則は運動群に属する変換に対して，その形が変わり，座標系のとりかたにより，法則を示す基礎方程式は複雑な形になったり，また簡単な見とおしのよい形にもなる．そこで，むしろ，この事情を利用し，ニュートンの力学の法則が簡単な形式に表現できるような座標系を特に選びだすことができるという意味である．つまり慣性系の導きかたについて説明して

いる〕．このような座標系の確立法は，上述の運動群を導いた議論のもとになった運動学的考察を根拠にした座標系の決定法よりも，はるかに完全なものである．

力学の冒頭には**ガリレイの慣性の法則**がある．すなわち，ひとつの質点は，それに外部から何の作用もはたらいていないとき，つまり外力の無いときは，ひとつの一様な並進運動を行なう．したがってその世界線はひとつの直線である．つまり質点の空間座標 x^i は時間 t の一次式である．ある剛体的な基準物体が在って，それを基準とした場合上述の法則が成立するとき，この基準物体を“座標系としての資格を与えられた物体”と呼ぶことにする．資格を与えられたひとつの基準物体上に固定された座標系（すなわちこの物体に刻まれた直交座標軸，時間の定まった始点，きめられた長さ，および時間の単位）としては，種々のものが可能であるが，これらは互いに基本群に属する変換（I）によって結ばれている．また任意の二つの基準物体 K, K′ がともに資格を与えられている物体だとしても，これらは必ずしも相対的に静止している必要はない．むしろこのうちの一方が他方のものに対して一様な並進運動をしている場合が普通である．実際，K, K′ を基準としたときのひとつの質点の座標をそれぞれ $x^i, x^{i\prime}$ とする．いずれにしても x^i と $x^{i\prime}$ が運動群に属する適当な変換で結ばれることは明らかである．しかしさらに，もし $x^{i\prime}$ が t の一次式で表わされるならば，x^i もまた t の一次式にならねばならない．したがって α_k^i は t に無関係な定数，a^i は t の一次式でなけ

ればならない．そこでKから見た質点の座標と，K′に設置された座標系から見た同じ質点の座標を結ぶ変換としては，基本群にさらに

$$x^i = x^{i\prime} + \beta^i t' \qquad t = t' \tag{1}$$

の形の変換を付け加えたものが求めるものである．ここでβ^iはKを基準としたときのK′の並進運動の速度の成分を示す．上述の（1）を基本群に付け加えた変換の全体はひとつの群をなす．この群を**ガリレイ群**と呼ぶことにする．われわれのグラフ表示では，うえに与えた（1）で定義される$(x^{i\prime}, t')$座標系の$x^{i\prime}$軸はもとのx^i軸と一致するが，新しいt'軸は，もとのt軸とは異なった方向を持つ．$(x^{i\prime}, t')$はこのような新しい座標軸を基準とした座標を示す（第8図参照）．

以上述べたことから，逆につぎのことがなりたつ：Kにおいて慣性の法則およびニュートンの力学がなりたつとすれば（ここで“運動”というときは，Kを基準とした運動と解釈する），同じことがK′を基準としても成立する．実際，ある運動に関与しているすべての物体に，ひとつの同じ，つまり共通の並進運動を与えたとき，慣性の法則やニュートンの力学の法則に反する行動をする現象は未だ一度も観測されたことがない．一様の速度で直線コースを走る列車内に起こるすべての現象は，静止している列車内においても，それらとまったく同じ現象が必ず起きる〔訳者注：ガリレイ群を導くまでの議論ではひとつの同じ現象を，二つの基準物体K，K′から眺めたとき，両者の目に映る見

かけ上，異なった“姿”の間の関係（1）が議論の対象であった．これとは逆に，ここでいっていることは，ある現象をKが観測して，Kがとらえた“姿”と，まったく同じ“姿”をK′も観測することが必ずできるということである．ただしこの場合にはK′の観測の対象となる現象はKのそれとは別のものである．K′の対象は，Kの対象に，K′と同じ（Kに相対的な）速度を更に賦与したものである〕．そこで物理学の法則はガリレイ変換に対して不変でなければならない．質量はニュートン力学では，基準物体に無関係なひとつのスカラーである．さらに（1）から導かれる関係

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{dx^{i\,\prime}}{dt'}+\beta',\qquad \frac{d^2x^i}{dt^2}=\frac{d^2x^{i\,\prime}}{dt'^2}$$

からわかるように，速度は基準物体の選びかたに関係するが，加速度はそれには無関係なひとつの空間的ベクトルである．したがってもし力も基準物体の選びかたに無関係なひとつの空間的ベクトルとすれば，“(質量)×(加速度)＝(力)”という力学の基本法則は基準物体のとりかたに無関係な性質のものとなる．つまり，物体どうしの間に働いている力は，これらの物体に，ひとつの共通の並進をあたえても，力は変化しないということが，上に述べたことの根拠になっている．ニュートンの力学は，そこに用いられている力の概念を具体化するためには，その背後に，力に対する上述の要求を満足する物理学の存在を必要とする．たとえば重力は，ニュートンの万有引力の法則によれば，実際，上の要求を満足していることがわかる．

ある質点系が外部からなんらの作用も受けていないときは，ニュートンの力学によれば，この閉じた質点系の重心は一様な並進運動をする．いま，太陽と，それをとりまく惑星系を一括して，このような閉じた質点系とみなせば，この太陽系の重心が静止しているか，それとも一様な速度で並進しているかと質問することは無意味である．それにもかかわらず，太陽がヘルクレス座の１点に向かって運動すると，天文学者が主張するときは，それはつぎのような統計的な観測結果にもとづくものである．すなわち，ヘルクレス座の中の上述の１点の近くに在る星がすべて平均において，上述の１点を中心として，そこから遠ざかるように見えるということである．——私が例えば森に近づくと，私の真正面にある木を中心として，他の木はすべて，この中心の木から次第に遠ざかるように見えるのとよく似ている．いま，恒星はどれも平均において静止している，つまり恒星全体の重心は静止しているということが確かならば，上述の天文学者の主張は意味のあるものとなる．すなわち天文学者のいうことは，恒星全体の重心に対する太陽系の重心の相対運動に関する主張である．

いままで述べたことからつぎのことが主張できよう．いま多くの基準座標系の集団が在り，これに属する任意の二つの座標系は必ず，ガリレイ群によって互いに結ばれているとする．その時は，この集団のどの座標系もすべて力学的には同格で，対象となる個々の力学系の特殊事情を考慮しない限り，特別にひとつの座標系だけを選出することは

できない（ガリレイ-ニュートンの相対性原理）．3次元空間における直交座標系どうしを結びつける変換群が3次元空間のユークリッド幾何学を決定するのとまったく同じ意味で，ガリレイ群は4**次元世界の幾何学**を決定する．すなわち任意の，数個の世界点の間のある関係，たとえばこれらの世界点の座標の間の算術的関係式がガリレイ群に属する変換に対して不変のときに限り，その関係は客観的意味をもつ．空間については，その中のすべての点に関して，それは一様である．また任意の点において，すべての方向についても一様であるといわれる．しかしこの主張は，つぎのような意味をもつ**空間の完全一様性**の主張の一部分にすぎない．すなわちすべての直交座標系はまったく同等であるという主張である．まったく同じように，この4次元世界がどのような意味において一様であるか（空間・時間は現象の形式として一様である．その中に含まれている物質的な内容の偶然的な不均一性について問題にしているのではない．）は相対性原理により決定される．

ガリレイ群に属する変換について，われわれはまずその線形性に注目しよう．すなわちこれによれば，**世界はひとつの4次元アフィン空間**である．この空間の幾何学を組織的に説明するのには世界点ばかりでなく，**世界ベクトル**（Welt-Vektor）または変位ベクトルも利用するのが好都合である．変位とは任意の世界点 P を他の点 P′ に対応させるひとつの写像である．それはひとつの座標系を用いるとつぎの関係式で与えられる；

$$x^{i\prime} = x^i + a^i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

ここに x^i は世界点 P の時空座標（ここで x^0 は t を示す），また $x^{i\prime}$ は同じ座標系における点 P′ の時空座標を示し，a^i はある定数である．この並進という概念は座標系のとりかたには無関係である．P を P′ に移す並進を $\overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ で示すことにしよう．4 次元のアフィン幾何学の全公理は上述の世界点や世界変位に対してなりたつ．またガリレイの慣性の法則はひとつのアフィン的法則である．それは，われわれの 4 次元アフィン空間，すなわち“世界”の中の直線がどのような運動によって実現されるかをわれわれに教えてくれる．つまり世界の中の直線は力をうけずに自由に運動する質点により描かれる軌道であることを教えてくれる．

アフィン幾何学の立場から計量幾何学の立場へ移ろう．世界のアフィン的影像をあたえるわれわれのグラフ的表示（ただし空間の座標をひとつ省略する）から，その計量的構造の本質を知ることができる．それはユークリッド空間の計量的構造とはまったく別のものである．すなわち世界は“層的構造”をもっている．そこでは，$t=$ 一定 という平面は絶対的意味をもつ．時間の単位をきめると任意の二つの世界点 A, B に対して，これらの間の時間差がきまる．それはベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{x}$ の時間成分である．それは，ひとつのアフィン座標系における一般のベクトル成分と同様に，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ のひとつの一次形式 $t(\boldsymbol{x})$ である．$t(\boldsymbol{x})$ が負か正かに応じてベクトル $\boldsymbol{x}$ は過去，または未来を向いている．また

$$t(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) > 0, \quad = 0, \quad \text{または} < 0$$

に応じて，(左からそれぞれ)，A は B よりも時間的に以前，B と同時刻，B よりも以後である．またおのおのの層 ($t=$ 一定) においてはユークリッド幾何学がなりたつ．それはひとつの定符号の二次形式にもとづいている．ただしこの二次形式はひとつの層の中に横たわっている世界ベクトル $\boldsymbol{x}$ [すなわち $t(\boldsymbol{x})=0$ を満足する $\boldsymbol{x}$] に対してのみ定義されたものである（なんとなれば，2 個の質点の同じ瞬間における両者の間の距離のみが意味のある量である）．一方，ユークリッド幾何学はひとつの正定符号の二次形式をその基礎としているから，結局，ガリレイ的計量はつぎのことにより規定される．

1．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して一次形式 $t(\boldsymbol{x})$ が，変位 $\boldsymbol{x}$ の“時間的長さ”をあたえる．

2．$t(\boldsymbol{x})=0$ を満足するすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ の作る 3 次元線形多様体に対して定義された正定符号の二次形式 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ の“長さ”の 2 乗をあたえる．

振動することのできる一様な媒質のなかの 1 点 O に，周期的な外力が働いて，媒質に波動が引きおこされると，この波動は O からすべての方向に一様な速度をもって同心球面状にひろがっていく．波の伝播速度は媒質の性質によってきまり，また場合によっては発生した波の振動数にも関係する．しかしわれわれにとって特に重要なのは光の伝播である．真空中における光の速さ（これは振動数には無関係）は普通，c で示される．われわれのグラフ表示（再び

空間座標をひとつ略す）では，世界点 O において発射された光の信号の伝播は第 8 図の O を頂点とする円錐で表わされる．その方程式は，

$$(ct)^2-\{(x^1)^2+(x^2)^2\}=0 \tag{2}$$

であたえられる．$t=$ 一定 という平面とこの円錐の交わりはひとつの円である．この円上の点は t という瞬間に，ちょうど光の信号が到達する点である．方程式（2）（ただし $t>0$）は，光の信号が通過する世界点のみがこれを満足する．ここで再び，このような現象を（2）のように記述することができるためには，如何なる基準座標系をその基礎に用いたらよいかという疑問が生まれる．恒星の光行差の実験によれば，ニュートンの理論の教える通り，地球はここに問題にしている基準座標系に対して運動していることがわかる．すなわちこの基準座標系は，ニュートンの力学で基準座標系として採用してよいとみなされる座標系と一致することがわかる〔訳者注；つまり力学的に許容された座標系（慣性系のこと）を基礎にとれば前に述べた光の円錐の議論は正しく成立するという意味である〕．しかし光が発光点を中心として同心球面状に伝播するということはガリレイ変換に対して不変でない：なんとなれば，第 8 図において，傾いた t' 軸が $t'=$ 一定 の平面と交わる点は，光の波面を示す円の中心からずれている．それにもかかわらず，つぎのような考えに従えば，このことはガリレイの相対性原理に対する反論とはならない．その考えというのは，永い間，物理学を支配していたもので，光は一種の物質的

な媒質を通して伝播するという考えである．この媒質は光エーテルと呼ばれ，その個々の部分は互いに相対的に運動することができるものと考えられていた．そこで水面に投げこまれた石によって引きおこされた水面上の波が同心円状にひろがるのと同様に，光もこのエーテルの中で振まう．このような現象からは，流体力学の方程式がガリレイの相対性原理にそむくという結論を引き出すことはできない．なんとなれば，媒質，つまり水（やエーテル）は，その各部分の比較的小さな振動を無視すれば，個々の部分は互いに相対的には静止していると考えられる．この媒質自身をわれわれは考慮にいれることを忘れてはならない．その結果，同心円状に波動が伝わるという主張の根拠となった基準座標系とおなじものをこの媒質の上に設置することが可能となるからである．

この問題についてさらに深く議論するために，われわれは本書の論理的な筋道のなかに光学を挿入することにする．なおこの問題は，“時間的に変化する電磁場の理論”として，マックスウェル以来，未解決のまま残されていた．

§ 21 時間的に変化する電磁場の電気力学．ローレンツの相対性理論

定常電磁場（§9）から時間的に変化する場合へ移行することにより，つぎのことが示される．

1．いわゆる電流は，実際に電荷の運動によって生ずる．

電荷が流れている円形の電線はビオ－サヴァールの法則にしたがって磁場を生みだす．いま電荷密度を ρ，その速度を $\boldsymbol{v}$ とすれば，伝導電流の密度 $\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{s}=\rho\boldsymbol{v}$ である．しかしビオ－サヴァールの法則が完全にもとのままの形でなりたつためには，電流密度は他の単位で測定されねばならない．すなわち $\boldsymbol{s}=\frac{\rho\boldsymbol{v}}{c}$ とすればよい．ここに c は速さのジメンジョンをもった普遍定数である．はじめにはウェーバーやコールラウシュにより，また後にローランドやアイヘンヴァルトによって繰り返された実験によれば，c の値は，観測誤差の範囲内で，真空中の光速度の値と一致することが示された [2]．いま $\rho/c=\rho'$ を電荷密度の電磁単位を用いたときの大きさと呼ぶことにすれば，電磁単位系における電気的力の密度は $=\rho'\boldsymbol{E}'$ となる．ここで $\boldsymbol{E}'=c\boldsymbol{E}$ は電磁単位系を用いた際の電場の強さを示す．

2．時間的に変化する磁場は，一様な電線のなかに電流を誘起する．それはオームの法則 $\boldsymbol{s}=\sigma\boldsymbol{E}$ と，ファラデーの電磁誘導の法則からあたえられる．ファラデーの法則とは，電線によって囲まれた部分を貫く磁束の時間的減少率は周囲の電線内に誘起された起電力に等しいというものである．これはつぎの式で表わされる：

$$\int\boldsymbol{E}'d\boldsymbol{r}=-\frac{d}{dt}\int B_n d\sigma \qquad (3)$$

[左辺は閉曲線（電線）にそった線積分を示し，右辺はこの閉曲線を縁にもつ曲面にわたって磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の（曲面の）法線成分を面積分することを示す]．右辺の磁束は，面積分

を計算するときの面の形には無関係で，ただその縁の閉曲線だけに依存する．なんとなれば

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0 \tag{4'}$$

であるから（これは真の磁荷が存在しないことを示す）．ストークスの定理を使うと（3）から微分形式の法則

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \tag{4}$$

が導かれる．定常的な場合にのみなりたつ方程式 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0$ は，時間微分の項 $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ を付け加えることによって一般化されたわけである．われわれの電気的技術のすべてはこの式にもとづいている．したがってこの付加項の必要性は経験によって最大限の保証を与えられていることになる．

3．これに反してマックスウェルの時代には，彼が提唱した磁場の基礎方程式

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{s} \tag{5}$$

の拡張のための付加項は，多分に，仮説的な性格のものであった．時間的に変化する場においては，例えばコンデンサーの放電の場合には $\mathrm{div}\,\boldsymbol{s}=0$ はもはやなりたたない．むしろこのときは電流の連続の方程式

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{s}=0 \tag{6}$$

がなりたつべきである．これは電流が電荷の流れからできていることを表わしたものである．ところで $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}=\rho$ であるから，湧点がない量（つまりその div をとると 0 となるもの）は $\boldsymbol{s}$ ではなくて，$\boldsymbol{s}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ である．そこで時間

的に変化する場のときは，(5) を

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{s} \tag{7}$$

でおきかえるべきことがすぐにわかる．他方

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \tag{7'}$$

は以前と同様に，時間的に変化する場合でも成立する．(7)，(7′) から逆に連続の方程式 (6) が導かれる．時間的微係数の付加項 $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$（これはマックスウェルの**変位電流密度**とよばれる）こそ，電磁振動が有限速度 c をもってエーテルの中を伝播するということに対する根拠である．これは光の電磁波説の基礎である．この理論は実に見事に，光学的諸現象を説明した．またこの学説はヘルツの有名な実験や，現代の無線電信によって直接実験的にも，またその技術的応用を通して，その正当性が証明された．以上から，光が同心球面状に伝播するという法則がなりたつような基準空間，つまり，光エーテルが静止しているように見える基準座標系を基準としたとき，上述のマックスウェルの法則が成立するということは明らかであろう．――一般にマックスウェルの場の方程式 (4)，(4′)，(7) および (7′) にさらに物性的法則（すなわち $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{s}=\sigma\boldsymbol{E}$）を付け加えねばならない [3].

しかしここでは，エーテル中（つまり真空中）の電磁場のみを考える．したがって

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}.$$

そこでマックスウェルの方程式は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \tag{8_1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{s}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \rho, \tag{8_2}$$

となる．電子論では，これらの方程式を普遍的になりたつ自然法則の厳密な表現と考えた．そこではさらに，$\boldsymbol{s} = \frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}$ とおいた．ここで $\boldsymbol{v}$ は，電荷を荷なっている小物体の速度を示す．

電荷をもった物体に及ぼす力（の密度）は，電気的および磁気的部分に分かれる．すなわち力の密度は

$$\boldsymbol{p} = \rho\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}]. \tag{9}$$

$\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{v}$ と平行だから，単位時間に物体の単位体積中に在る電子に与えられる仕事は

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}').$$

これは電子の運動エネルギーにかわり，さらに電子の衝突によって中性分子にその一部は移される．現象論的には，このようにして引きおこされた分子運動の強化は，導体内におけるジュール熱の形で現われる．実際，観測によれば，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}'$ は，単位時間に，電流によって，導体内の単位体積中に生まれた熱量に等しいことが示される．エネルギーのこのような消費は電流を生みだす機械によって償われる．

さて（8_1）に $-\boldsymbol{B}$ を，また（8_2）に $\boldsymbol{E}$ をかけて両者の和をとると，

$$-c\cdot\mathrm{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}] - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{E})^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{B})^2\right\} = c(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E}).$$

いま

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}, \qquad \frac{1}{2}(\boldsymbol{E})^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{B})^2 = W$$

とおき，体積 V にわたって上の式を積分すると，

$$-\frac{d}{dt}\int_V W dV + c\int_\Omega S_n d\sigma = \int_V c(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E}) dV$$

となる．左辺の第2項は V の表面 Ω にわたる表面積分，S_n は面上の内向き法線の方向の $\boldsymbol{S}$ の成分を示す．右辺は単位時間に V の中にある電荷に与えられる仕事を示す．これは V のなかにある電磁場のエネルギー $\int W dV$ の時間的減少率と，単位時間に外から V の中に流れこむエネルギーの和に等しい．したがってわれわれの方程式はエネルギー保存則を与えてくれる．この保存則は場のエネルギー密度 W に対してわれわれが以前に与えた数式が正しいことを保証するものである．さらに $c\boldsymbol{S}$ はポインティングのベクトルとよばれるが，これがエネルギーの流れの密度を表わすことも，わかる．

場の方程式 (8) は，もし電荷や電流の分布がわかっているときは，つぎのような方法で，その積分が求められることがローレンツにより示された．まず div $\boldsymbol{B} = 0$ は

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{f} \tag{10}$$

とおけば，恒等的に満足される（$\boldsymbol{f}$ はベクトル・ポテンシャルとよばれる）．これを (8_1) の第一式に代入すれば $\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}$ は“渦なし”量，すなわち，この rot をとれば 0 となる．それゆえ

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\,\varphi \tag{11}$$

とおくことができる（φ をスカラー・ポテンシャルという）．$\boldsymbol{f}$ は一意的にきまらないが，この任意性を利用して，副条件

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}=0$$

を満足させることができる．この条件はいまのわれわれの目的にとってはなはだ好都合である（定常場のときは $\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}=0$）．上に導入されたポテンシャルを（$8_2$）の二つの式に代入すれば，簡単な計算によりつぎの式が成立することがわかる；

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}+\Delta\varphi=-\rho, \tag{12}$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial t^2}+\Delta\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{s}. \tag{12'}$$

（12）のタイプの方程式は波動が伝播速度 c でひろがることを示す．実際，ポアッソンの方程式

$$\Delta\varphi=-\rho$$

が

$$4\pi\varphi=\int\frac{\rho}{r}dV$$

という解をもつように，（12）の解は

$$4\pi\varphi=\int\frac{\rho\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{r}dV$$

で与えられる．この左辺は，時刻 t に，場所 O における φ

の値を示す．r は点 O から電荷のある点 P までの距離を示し，この P について積分が行なわれる．被積分関数 ρ としては，時刻 $t-\dfrac{r}{c}$ における点 P の電荷密度 ρ の値を示す．同様に（12′）の解はつぎの積分で与えられる：

$$4\pi \boldsymbol{f} = \int \frac{\boldsymbol{s}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{r} dV.$$

したがって 1 点 O における場は，同じ時刻における電荷や電流密度に依存するのではなく，電荷の存在する任意の場所 P に対して，P から O まで，速度 c で作用が伝播するのに必要な時間 r/c だけ O の時刻よりも以前の時刻の電荷の状態が重要である．

直交座標系 (x^1, x^2, x^3) を用いたときのポテンシャルの方程式に出てくる数式

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^3)^2}$$

が

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

を不変にする変数 x^1，x^2，x^3 の一次変換に対して，不変であるように，時間的に変化する場に対しては，

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial t)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^3)^2}$$

は，つぎのような一次変換に対して不変である．すなわち，それはローレンツ変換とよばれるもので，

$$-(ct)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{13}$$

を不変にする，4 個の座標 t, x^1, x^2, x^3 の一次変換である．

ローレンツおよびアインシュタインは，単に方程式（12）のみならず，エーテルに対する電磁気学の法則のすべてがローレンツ変換に対して不変であることを発見した．すなわちそれらの法則は，（13）の形の（正定符号ではない）計量のあたえられた4次元アフィン空間（その中の点の座標を t, x^1, x^2, x^3 とする）におけるテンソルの不変な関係式として表わされる．（これがローレンツ - アインシュタインの相対性の法則である．）

これを証明するために，時間の単位を変えて $x^0 = ct$ を時間座標とする．そこで距離の基本形式の係数は，

$$g_{ik} = 0 \ (i \neq k), \quad g_{ii} = \varepsilon_i$$

となる．ここに $\varepsilon_0 = -1$，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ である．そこで添字 i について共変なテンソル成分を i について反変な成分に移すのには，単に ε_i をかければよい．電荷の連続の方程式（6）はつぎのような不変な形式にかきあらわされる：

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0.$$

ただし

$$s^0 = \rho, \qquad s^1, s^2, s^3 = \boldsymbol{s} \text{ の } x, y, z \text{ 成分}$$

を4次元空間のひとつのベクトル（4元電流）の反変成分とみなすことにした．これと平行して，（12），（12′）において

$$\varphi^0 = \varphi \ (= -\varphi_0),$$

$$\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3 = \boldsymbol{f} \text{ の } x, y, z \text{ 成分 } (= \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

を，電磁ポテンシャルを表わす 4 次元ベクトルの反変成分とみなせば，(12)，(12′) は不変な方程式となる．このようにすれば，ポテンシャルを使って$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$を表わす関係式 (10)，(11) はつぎのような不変な形式にかかれる；

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} = F_{ik}. \tag{14}$$

ここで $\boldsymbol{E} = (F_{10},\ F_{20},\ F_{30})$，$\boldsymbol{B} = (F_{23},\ F_{31},\ F_{12})$ とおいた．これによって電場および磁場の強さはひとつの 2 階線形テンソル（つまり 2 階反対称共変テンソル）F で表わされたひとつの“場”に統一される．(14) からさらに不変な方程式

$$\frac{\partial F_{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0 \tag{15}$$

が導かれる．これはマックスウェルの方程式の第一の組 (8_1) にほかならない．3 次元的な種々の量を正しくまとめて，ごく自然に 4 次元のベクトルやテンソルへ導くために，われわれは，ポテンシャルを使ったローレンツの解法という回り道をとった．なお $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$ を反変テンソルで表わせば

$$\boldsymbol{E} = (F^{01},\ F^{02},\ F^{03}),\ \ \boldsymbol{B} = (F^{23},\ F^{31},\ F^{12}).$$

つぎにマックスウェルの方程式の第二の組 (8_2) はつぎのような不変な形式で表わされる；

$$\sum_k \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = s^i. \tag{16}$$

ここでさらにつぎのような共変成分をもつ 4 次元ベクトルを導入しよう：

$$p_i = F_{ik} s^k \tag{17}$$

(これに対応する反変成分は

$$p^i = F^{ik} s_k).$$

——これからは以前の約束にしたがって添字についての和の記号を省略する——上の p^0 は“仕事密度”，つまり単位時間に単位体積内にあたえられる仕事を表わす：つまり $p^0 = (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E})$ (注意：ここでは時間の単位は新しい尺度，$x^0 = ct$ である)，また p^1, p^2, p^3 は電磁的力の密度を表わす．

以上でローレンツの相対性理論は完全に証明された．この証明の結果から，同時にわれわれはつぎのことに気づく：**ここに導かれた法則は定常的な磁場の法則**（§9.（63）参照）**とまったく同じ形をしているということである．すなわち§9に導かれた3次元的テンソル方程式を4次元に拡張すれば，ここに導かれた方程式となる．**以上に述べたような，4次元的なテンソルを用いた数式的表現こそ，物理法則の真の数学的調和を表わしたものであり，これ以上に完全な調和はありえないと確信する．

なお，3次元の場合と同様に，4次元的な対称“張力テンソル” S から“4元力” p_i をつぎのように導くことができる．

$$-p_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x^k} \quad \text{または} \quad -p^i = \frac{\partial S^{ik}}{\partial x^k}. \tag{18}$$

ここで張力テンソル S は

$$S_i^k = F_{ir}F^{kr} - \frac{1}{2}\delta_i^k |F|^2 \tag{18'}$$

で与えられる．場の“大きさ”の“2 乗”（これは正定符号ではない）$|F|^2$ とは

$$|F|^2 = \frac{1}{2}F_{ik}\cdot F^{ik}$$

のことである．(18) は直接の計算で，その正しいことをたしかめることができる：

$$\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k} = F_{ir}\frac{\partial F^{kr}}{\partial x^k} + F^{kr}\frac{\partial F_{ir}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}F^{kr}\frac{\partial F_{kr}}{\partial x^i}.$$

この右辺第 1 項は

$$-F_{ir}s^r = -p_i$$

となる．また第 2 項は，F^{kr} にかかっている因子を (k, r) について反対称に書けば

$$= \frac{1}{2}F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ir}}{\partial x^k} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^r}\right).$$

これと第 3 項を一緒にすると

$$-\frac{1}{2}F^{kr}\left(\frac{\partial F_{ri}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^r} + \frac{\partial F_{kr}}{\partial x^i}\right).$$

この（　）は (15) により $=0$.

また $|F|^2$ が $= \boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2$ であることはすぐわかる．S^{ik} の各成分が何を意味するかは，時間と空間の添字，つまり 0 と 1, 2, 3 を分離してしらべれば容易にわかる：

$$S^{00} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) = W \quad (\text{エネルギー密度}),$$

$$S^{0i} = \{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \text{ の成分}\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$S^{ik} = (\text{マックスウェルの張力テンソルの成分})$$

$$(i, k = 1, 2, 3).$$

この最後の S^{ik} は§9 にあたえられた張力テンソルの電気的，ならびに磁気的な部分の和である．したがって（18）の第 0 成分は，エネルギー保存則をあたえる．（18）の 1, 2, 3 成分もまったく似た形をしている．いましばらく，ベクトル $\frac{1}{c}\boldsymbol{S}$ の 3 成分を G^1, G^2, G^3 とかき，また

$$S^{i1},\ S^{i2},\ S^{i3}$$

を成分にもつ 3 個の 3 次元ベクトルを $\boldsymbol{t}^{(i)}$ とかくことにする．これらの記号を使えば（18）の 1, 2, 3 成分は

$$-p^i = \frac{\partial G^i}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{t}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (19)$$

空間的領域 V の中にある電子に作用する力は，これらの電子の持つ運動量の時間的増加率に等しい．この増加量（単位時間中の）は（19）によれば，$\frac{1}{c}\boldsymbol{S}$ という密度で分布している場の運動量の単位時間中の減少量および，外からの V 中へ単位時間中に流れ込む場の運動量の和に等しい．運動量の第 i 成分の流れの密度は $\boldsymbol{t}^{(i)}$ であたえられる．したがって運動量の流れの密度はマックスウェルの張力テンソルに他ならない．**エネルギー保存則はローレンツ変換に対して不変な法則の時間的成分にすぎない．この法則の空間的成分に相当するものは運動量保存則である．**全エネルギー，

並びに全運動量は保存される．これらは物質から場の中へ流れ込んだり，また物質のほうへもどって来る．つまり場のエネルギーや場の運動量から，物質のエネルギーや物質の運動量に変わったり，またこの逆の変遷を行なう．以上は（18）の簡単な直観的な解釈である．この解釈にもとづいて，今後は4次元世界のテンソル S を**エネルギー・運動量テンソル**とか，あるいは簡単にエネルギー・テンソルと呼ぶことにする．S の対称性から，運動量密度 $=\dfrac{1}{c^2}$（エネルギーの流れの密度）がなりたつ．したがって場の運動量は非常に小さい．しかしそれの存在は，鏡の面に働く光の圧力として実証することができる．

さてローレンツ変換は一次変換である．したがってこれは（もし例のように空間の次元をひとつ略して，われわれのグラフ表示を用いれば）ひとつの他のアフィン座標系を導入することを意味する．そこで新しい座標系の基礎ベクトル $\boldsymbol{e}_0'$, $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ が，もとの基礎ベクトル $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$（これらはそれぞれもとの座標系の x^0, x^1, x^2 軸方向を向く単位ベクトルである）に対してどんな関係にあるかを考えてみよう．

任意のベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x}=x^0\boldsymbol{e}_0+x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2=x^{0'}\boldsymbol{e}_0'+x^{1'}\boldsymbol{e}_1'+x^{2'}\boldsymbol{e}_2'$$

に対して，

$$-(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2$$
$$=-(x^{0'})^2+(x^{1'})^2+(x^{2'})^2\quad[=Q(\boldsymbol{x})]$$

が成立しなければならないから，特に $Q(e_0')=-1$ となる．そこで点 O から突き出ている単位ベクトル e_0'，すなわち t' 軸は光の伝播を示す円錐の内側にある．$t'=$ 一定という互いに平行な平面群と光円錐の切口は楕円である．その中心はちょうど t' 軸がこの平面を貫く点である（第 8 図参照）．また $x^{1\prime}$, $x^{2\prime}$ 軸はこの楕円の共役軸であり，楕円上の点は

$$(x^{1\prime})^2+(x^{2\prime})^2=\text{一定}$$

を満足する．

さてわれわれが，物質的な，振動するエーテルという描像に固執するかぎり，われわれはローレンツの相対性理論を，単なる数学的不変性とみなすにすぎない．つまりマックスウェルの方程式が持つ驚くべき，しかし単なる数学的な不変性とみなすことになる．そのような立場ではガリレイ－ニュートンの相対性原理が真に正当な相対性原理として存続する．しかしここでつぎのような問題がおこる．すなわち単に光学的現象ばかりでなく，全電気力学やその法則のすべてを，ガリレイの相対性原理を満足するエーテル力学の結論として解釈せよという問題である．それには電磁場に関する量をすべて，エーテルの密度とか速度とあるきまった関係で結びつけることがまず必要である．これによってはじめて，上の問題に答えることができるようになろう．マックスウェルの提唱した光の電磁波説が出る以前にも，人々は，光学的現象に対して，部分的にこの問題を解決しようと試みた．しかし決して最終的な結論には到達できなかった．しかしこの問題をもっと総括的な立場（マ

ックスウェルに従えば，光の現象はこの中にはいる）において究明しようとする試みはほとんどなかった．むしろ，**なんら媒質を必要としない，真空中に存在する場**という描像が次第に有力なものとなりはじめた．既にファラデー自身も，“場は物質からできていると考えてはならない．むしろ逆に物質は，場の特別な，異常な性質をもった部分（つまり場の特異点）である”と，明確にいいきっている．

§ 22 アインシュタインの相対性原理

光の速さを測るにはどうすればよいか？　いま剛体の板の上の 2 点 A, B に印がつけてあるとする．光が A から B に到達するのに要する時間を測るためには，まずわれわれは A の時間を B に知らせねばならない．すなわち，何かの方法で A, B の時間を同時刻にまず調整しておく必要がある．これについては§20 に二，三の方法が述べられている．そのひとつは，A から B に向かって，すべての可能な速さをもって物体を投げるという方法である．しかし実際にはこれは不可能である．なんとなれば，物体に光より早い速度を与えることは誰にもできないから．したがってこの方法は精密なものでなく，c が無限大ではないことを示すことはできない．他の作用伝播法もこれと似たものである．また“時計を運ぶ方法”（二つの同種の時計を点 A で等しい時間を刻むように調整してから，そのひとつを A に留め，他を B まで運ぶという方法）も，実際には c が有限

の値をもつことを示すほど精密な測定を行なうには，精度が不十分である．1675 年レーマーは光速度が有限であることを解明し，またその値を実測から導き出した．彼は木星の衛星が，木星を一周する時間を地球上から観測した場合に，この時間は一定でなく，ある不均一性が周期的に繰り返されることを発見した．しかもこの不均一性の周期は，地球の公転の周期と一致し，ちょうど 1 年であることを発見した．これを説明するのに，地球と木星の衛星の間に未知の強い相互作用があって，それにより地球の公転が木星の衛星の運動に上述の観測で発見されたような大きな摂動を与えるからであると考えることは，あまりにも馬鹿げている．レーマーは，これの原因を，光が衛星から地球まで到達するに要する時間が，地球の公転軌道上の位置により異なるためであると考えた．これが c の値を算出した基礎である．フィゾーが地上で行なった直接測定法はつぎのような簡単な考えにもとづいている：すなわち点 A は光の発信所であるとともに受信所でもあるとする．つまり A から射出された光は B に行き，B の鏡で反射されて，再び A に帰るという方法である．この実験で，光が A を出発して再び A に帰るまでに経過した時間 τ は，距離 $|AB|$ に比例することが明らかにされた．この法則の比例定数 c こそが，光の速さである：

$$\tau = \frac{2 \cdot |AB|}{c}. \tag{20}$$

この方法によって，離れた場所における時間の調整が可能

となった．この方法は今まで提案されたどの方法よりもすばらしく精度の高いものである．いま A に在る時計が時刻 t を指す瞬間に光を A から B に向かって発射したとする．光が B に到着した瞬間に，B に在る時計が時刻 $t+\dfrac{|AB|}{c}$ を指すように調整すれば，これで A, B の時計は，等しい時刻を示すように調整されたことになる．このような考えに従って，光，または無線電信の信号を中心 A から発射することにより，A の時間を，われわれの剛体板上の他のすべての点に移すことが可能となる．いま，この剛体板が沢山の塔でおおわれているとしよう．これらの塔はそれぞれひとつずつ自分の時計を備えており，それらはすべて中央の塔 A からの時報で調整されてあるとすれば，任意の事件の起きた場所とその時刻は，この事件が起きた**塔の場所と，その時計の示す時刻**をいえばよい．

ここでまず，エーテルの考えになお固執してみよう．もしわれわれの基準系が光エーテルの中に静止しているとすれば，上に述べた時間の調整法は実行可能である．しかしもし基準系がエーテルに対して動いているならば，別の新しい考えが必要となる．いずれにしても物体，たとえば地球が，静止しているエーテルに対して相対的にどのような運動をしているかを確かめることが可能でなければならない．光行差はこれを示さない．むしろ光行差によって確かめることのできることは，上述のようなエーテルに対する相対運動が 1 年のあいだに変化するということである．いま，A_1, O, A_2 は地球上に固定された 3 個の点とし，これ

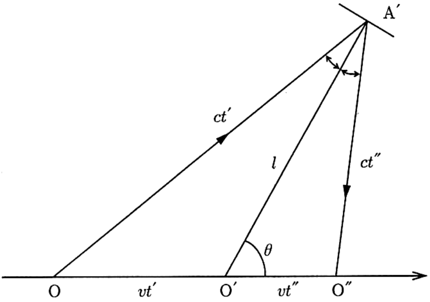
らは地球と一緒に運動しているとする．この３点は，地球のエーテル中における運動の方向と同じ方向の一直線上に在り（A_1 から A_2 に向かう向きが地球の運動の向きとする），$A_1O = OA_2 = l$ とする．エーテルの中を走る地球の速さを v，$\dfrac{v}{c} = q$ は（おそらく）１より非常に小さいとする．O から発射された光の信号は，時間が $\dfrac{l}{c-v}$ だけ経過したのち A_2 に，また時間 $\dfrac{l}{c+v}$ だけ後に A_1 に到達する．しかし直接に時間を O から，A_1，A_2 に移すことが困難なために，残念ながらここに述べた時間の差を確かめることはできない．しかしここでフィゾーの考えを利用することができる．すなわち A_1，A_2 に小さな鏡をおき，それらによって O からきた光を再び O に送り返す．いま時刻０に点 O から発射された光が A_2 で反射されて，再び O にもどるまでに要する時間は

$$\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

これに対して，A_1 で反射される光の往復の所要時間は

$$\frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

このようにして，両者には差異は起こらない．いま地球と一緒にエーテル中を並進する第三の点 A を地上に考える．これは地上に固定されており，OA $(=l)$ はエーテル中の進行方向と角 θ をなすものとする．第９図の点 O, O′, O'' はそれぞれ点 O の時刻０における位置（すなわち光が O から発射されるときの位置），鏡 A が点 A′ に来て，そこで O からの光



第 9 図

を受信，反射する時刻 t' における O の位置（が O′），最後に光が再び O に立ちもどった時刻 $t'+t''$ における O の位置（が O″）である．図から，$OA' : O''A' = OO' : O''O'$ がなりたつ．したがって，$\angle OA'O''$ は，直線 $O'A'$ によって二等分される．そこで，全体が静止している場合と同様に，A に在る鏡は光が O にもどることができるためには OA に垂直に設置されねばならない（第 9 図では，O′A′ と A′ に在る鏡面とは垂直でなければならない）[2)]．そこで初等的な三角形の計算から角 θ の方向への光の見かけ上の伝播速度は

$$\frac{2l}{t'+t''} = \frac{c^2 - v^2}{\sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta}} \tag{21}$$

2) これは厳密にいえば正しくない．なんとなれば運動している鏡に対しては静止の場合の反射の法則は厳密には成立しない．しかし正しい反射角からのズレは $q^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ の程度である．

で与えられる．したがって静止している地球の場合と異なり，速度は一定ではなく，光の伝播方向に依存する．そこで種々の方向に対して伝播速度を観測することによって v の方向と大きさが決定される．

この観測を実際に行なったのは，有名なマイケルソンの実験である [4]．この装置は O と剛体的に結びついた鏡 A，A* があり，$\mathrm{OA}=l$，$\mathrm{OA}^*=l^*$ とする．一方は地球のエーテル中における運動方向に平行に，他はこれに垂直におかれている．全装置は O を中心として平面 AOA* 内で回転させることができる．点 O において，$\angle \mathrm{A}^*\mathrm{OA}$ を二等分するようにおかれた半透明鏡により，O に入射した光は二つに分かれ，一方は A に，他は A* に向かう．それらは，それぞれ鏡 A，A* により反射されて再び O にもどる．そこで再び半透明鏡によってひとつの方向（すなわち観測者の方向）に，合成されて出て行く．(21) により与えられる光路差

$$\frac{2l}{1-q^2}-\frac{2l^*}{\sqrt{1-q^2}}$$

のために（l と l^* はほとんど等しいとする），干渉がおこる．いま，この装置全体をゆっくり 90° だけ回転させ，A* が地球の運動方向に一致するようにさせれば，上に求めた光路差は連続的に

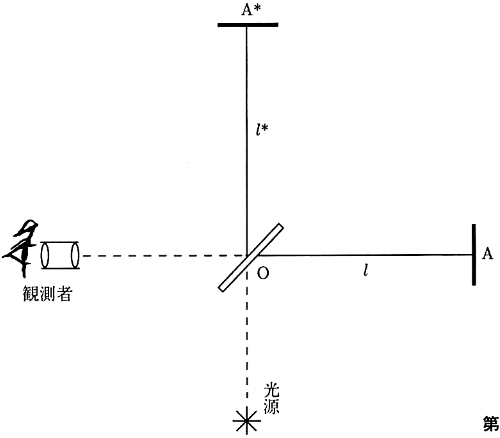
$$\frac{2l}{\sqrt{1-q^2}}-\frac{2l^*}{1-q^2}$$

に変わる．そこで光路差はこの回転により

$$2(l+l^*)\left\{\frac{1}{1-q^2}-\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right\}\sim(l+l^*)q^2$$

だけ減少する．したがって干渉稿の移動が必ずこれにともなうはずである．干渉縞の移動について，計算から予想される移動量の，たとえ 1% でも，マイケルソンの干渉計では，それを確認できるはずなのに，実際の実験では痕跡すらも観測できなかった．

リッツ [5] や他の人々は，運動している光源から出た光の伝播速度は，運動方向の場合は $c+v$，逆方向では $c-v$，一般に空間的な単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ の方向に射出された光の速さは $c+(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})$ であると仮定することにより，上述の実験



第10図

と理論的予想のくいちがいを克服しようと試みた．この仮定は大砲の弾丸の速さの事情とよく似ている．すなわち大砲の場合には，あらゆる方向に発射された弾丸は，どの方向でも，大砲と相対的に，一定の速さ c をもっている．これに反して，媒質中の波の先端の伝播速度は媒質の性質により決定され，波の根源の運動状態にはよらない．したがって上述の仮定は，媒質中の波の伝播速度についてのわれわれの考えとは一致しない．マイケルソンの実験の否定的結論を説明することができるこのリッツの仮定は，光学的現象に対するわれわれの理論的描像に矛盾するばかりでなく，光学的現象そのものにも矛盾する．すなわちつぎの原理は非常に高い精度をもって実証されている（この原理は**光速度不変の原理**といわれる）：**光速度は光源の運動状態に無関係である**．もしそうでなければ，光のスペクトルは2次元的なものとなるはずである；すなわちスペクトルは振動数に応じて変化するばかりでなく，これと無関係な伝播速度の差にも依存する．しかし実際の光学の実験では，振動数が等しいにもかかわらず，異なる性質をもった光が存在するという事例は一度もない．むしろ，振動数は光のすべての特性（屈折とか干渉のさいのふるまい）を一意的に決定してしまう．あるきまった振動数の光を，性質の違いに応じて，さらに単純な何種類かの光に分けるというようなことは，未だかつてないことである．ド・ジッター [6] は二重星の観測——衛星が親星のまわりを周遊するため，衛星から射出された光の伝播速度が一定でないとすれば，

衛星の実際のふるまいと，光学的に観測された結果の時間的ふるまいの間には当然くいちがいが生ずるはずである——から，光源の速度 v による光の伝播速度の変化は v の 1/1000 よりも小さくなければならないことを発見した．

さてローレンツは，つぎのような思いきった仮説により，マイケルソンの実験結果を説明しようと試みた．エーテル中を速さ v で運動している剛体は，静止していたときの長さにくらべて，その運動方向の長さが $\sqrt{1-q^2}$ 倍に収縮するという仮説である．実際このように仮定すればマイケルソンの実験の否定的結果は解明される．なんとなれば，最初の位置では，OA の長さは実際には（すなわち，エーテル中に静止している人から見れば）$l\sqrt{1-q^2}$，OA* は l^* である．これに対して，装置を回転させたのちには，OA の長さは l，OA* は，$l^*\sqrt{1-q^2}$ となる．そこで光路差は装置の回転前，回転後のいずれの場合にも $\dfrac{2(l-l^*)}{\sqrt{1-q^2}}$ となって変化がない．また点 O に固定された鏡を回転させて，種々の方向に光を反射させても，見かけの伝播速度は $\sqrt{c^2-v^2}$ となり，方向には無関係となる．しかしそれでも，c よりも見かけのうえで小さくなった速度 $\sqrt{c^2-v^2}$ をたしかめることは理論的には可能のように見える．しかしエーテルが，その中を走る物さしの長さを，その運動方向について，$\sqrt{1-q^2}$ 倍に縮めると考えるならば，時計の進みかたもこれと同じ割合でおくれることになり，その結果，見かけの

伝播速度は相殺されて再び c となる[3]．実際，マイケルソンの実験ばかりでなく力学ならびに電磁気学の双方に関連する現象を通して，地球のエーテルに対する運動の影響を確認しようとするすべての試みはみな，否定的結果におわった [7]．そこでエーテルの力学としては，単にマックスウェルの法則をエーテルの立場から説明するばかりでなく，あたかもエーテルが“いまいましい物理学者どもよ，お前たちにこの私（エーテル）がつかまってたまるものか！”とわれわれに挑戦しているかのように見えるこの驚くべき物質への作用（ローレンツ収縮のこと）をも解明しなければならない．

今まで述べたことは結局“エーテル内における並進運動と，静止の状態が区別できないのはなぜか？”という問題である．これに対する唯一の合理的な解答は，アインシュ

3） 訳者注：いまつぎのような物を時計として使うことにする．平行な 2 板の向かいあって置かれた鏡の間に光の信号を往復させる装置である．鏡と鏡の間の距離を r_0（エーテルに対して静止しているときの長さ）とすれば，この時計も地球と一緒にエーテル中を速さ v で走っているから，1 往復に要する時間は $2r_0/c\sqrt{1-q^2}$ となる．（これはエーテルに静止している人が測定した時間である）．本文の説明からこの時間 $t_0 = 2r_0/c\sqrt{1-q^2}$ は鏡面の法線の向きによらない．地球上におこるすべての現象の時間は t_0 を単位として測ることにする．したがって，点 O から θ の方向に l だけ離れた点に置かれた鏡 A に向かって，光が O から往復する時の所要時間 $2l/c\sqrt{1-q^2}$ も t_0 を単位で測ると，l/r_0 となる．これは地球がエーテル内に静止している時，同じ実験を同じ時計で測定した場合の値に一致する．つまり所要時間の測定値は v に無関係である．

タインにより与えられた．すなわち“**その理由はエーテルなどというものはもともと存在しないから**”である（エーテルは，それが提唱されたときから，いつも不明瞭な仮説的存在であったし，またそれはいっこうに効果のない存在であった）．一方現実の事情はつぎのようになっている：力学ではガリレイの相対性原理がなりたち，電気力学についてはローレンツの相対性原理が成立している．そこでもしニュートンの力学も，マックスウェルの理論もともに正しいとするならば，これらは互いにそれぞれの相対性原理についての主張をやめて，ひとつの絶対座標系を決定せざるをえない．すなわちそれを基準にとれば，力学の法則はニュートンの形式に書かれ，他方，電気力学についてはマックスウェルの方程式が成立する．ところで並進と静止を区別しようとするすべての実験が否定的結果しか与えなかった理由を説明しようとするとわれわれは常に大きな困難に出会った．しかしもし上に述べた二つの相対性原理のうちの一方だけが，すべての自然現象に対してなりたつべきであると考えるならば，この困難は克服される．ところで，もし c を ∞ に極限移行させれば，ローレンツの相対性原理はガリレイのそれになる．このことは§21のおわりに述べた幾何学的な考察からも容易にわかる．したがって電気力学は，その中にあらわれる c を ∞ に移行させたときはじめて，ガリレイの相対性原理の要請を満足するものとなる．その結果は，電磁誘導は存在しないことになる．光や電磁波も存在しない．また電流どうしのあいだに磁気的力

が存在しないことになる．これとは逆に，ローレンツの収縮の仮説をみとめるならば，ニュートンの力学はこれにより修正される．すなわちそれはローレンツ - アインシュタインの相対性原理を満足するような形に書きなおされる．ただし修正されたものと，もとのニュートンの力学の法則のちがいは $(v/c)^2$ の程度の量となる．この量は，地球上で日常経験するすべての速さや惑星の問題にでてくる v については，われわれの観測可能な限界よりも，はるかに小さな量となる．われわれの力学的な経験は，c が ∞ とは異なることを識別できるほどには十分な精度をもっていない．電気力学でもふたつの運動する電荷（その速さを v_1, v_2 とする）の間に働く磁気的力は，これらの間に働く静電気的力にくらべて v_1v_2/c^2 倍ほど小さい．しかし電子の速さは比較的大きな値をもつ．また導線内を流れる個々の電子による磁気的力をすべてたし合せると，その結果は，c が有限であることによる補正を明確に示す．すなわちこの現象は c の有限であることを示す最も有力な，また明快な現象である．

さて今まで述べてきたすべての困難は，アインシュタインにより一挙に取り除かれた [8]．彼の解答とは：**世界は 4 次元アフィン空間である．それの計量は，1 個の負次元，および 3 個の正次元からなる二次形式**

$$Q(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$$

によりあたえられる．二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の簡単な，具体的な意味はつぎの通りである．いま世界点 O から発射された光

の信号が世界点 A に到達したとすれば，$\boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくとき，$Q(\boldsymbol{x})=0$ で表わされる円錐面（これは二つある．その中の適当な一つの円錐面）の上に，A は必ず在る（§4 参照）．この事実を利用して $Q(\boldsymbol{x})\leqq 0$ で表わされる二つの円錐のうちで，“未来に向かって開いた円錐”を“過去のほうに開いた円錐”から客観的な方法で区別することができる．〔すなわち点 A がのっている円錐は O より未来の方に開いた円錐である：訳者〕．いま原点 O と，O から突き出している基礎ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ $(i=0,1,2,3)$ で構成された適当な“**標準座標系**”を用いれば，$Q(\boldsymbol{x})$ は標準形

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = -(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$$

になる（x^i は点 A の座標）．なお基礎ベクトル $\boldsymbol{e}_0$ は点 O を頂点とし，未来の方に開いた円錐の内部にあるものとする．このような標準座標系は無数にあり，それらはどれも同等で，どのひとつをも特別に選び出すべき客観的な理由はない．そこで，どれでもよいから，このような標準座標系のひとつをとれば，x^0 は時間座標，x^1, x^2, x^3 は空間の直交座標とみなすことができる．また空間，時間に関連したすべての周知の公式は，ここに用いた座標系を基準にしたとき，全く同じようにそれらを使用してかまわない．——アインシュタインの考えを，はじめて数学的に適切な形で公式化したのはミンコウスキー [9] である．4 次元世界幾何学という描像は彼の考えにもとづくもので，本書でははじめから，この考えを基礎としてきた．

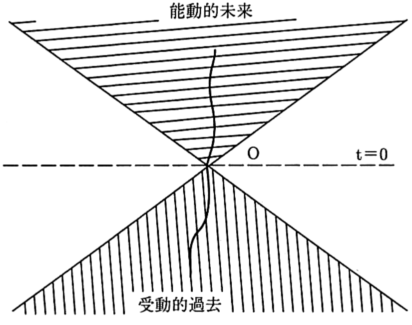
アインシュタインの相対性原理は数学的にはガリレイの

それよりも，明らかに，ずっと簡単で，また見とおしのよいものである．世界幾何学は，アインシュタインおよびミンコウスキーによって，ユークリッドの 3 次元空間の幾何学に非常に似たものとして創られた．直観的な見かたをすれば，世界幾何学は，同時刻が客観的意味をもつというわれわれの従来の信念を放棄すべきことをわれわれに強要している．このドグマからの解放こそ，アインシュタインにより発見された偉大なる認識論的事実である．彼の名がコペルニクスと並べられるのもこの事実の発見のためである．前節のおわりに述べたわれわれのグラフ的表示によれば，$x^{0\prime}=$ 一定 という平面の集団は，もはや $x^0=$ 一定 という平面の集団とは一致しないことが容易にわかるであろう．4 次元世界の距離を規定する $Q(\boldsymbol{x})$ のために，任意の $x^{0\prime}=$ 一定 という平面の上ではつぎのような計量が規定される．すなわちこの平面と“光円錐”の切口は楕円であるが，$x^{0\prime}$ 面上の計量によれば，この楕円はひとつの円となり，またこの平面上でユークリッド幾何学がなりたつ．またこの平面を $x^{0\prime}$ 軸が貫く点は上述の円（楕円）の中心である．したがって x' - 系でも光の信号は光源を中心とした同心円状に伝播する．標準座標系を適当にえらべば，原点 O を通る任意の平面で，光円錐とはその頂点だけを共有する平面，つまり O を頂点にもつ二つの光円錐を互いに分けるような平面は，必ず $x^0=$ 一定（または $t=$ 一定）の形に表わすことができる．そこでアインシュタインの相対性原理から必然的に，つぎのことが結論のひとつとして導か

れる．O から発射された任意の信号は，O を頂点とし，未来の方に開いた光円錐の外側に在る世界点 A（円錐面上の点は除く）には絶対に到達できない．換言すれば，すべての物体のとり得る速度，またすべての物理的作用の伝播速度の上限が c であるということである．この事実こそ光速度 c の絶対的な意味を最もよく表わしている．実際われわれは光速の 99% に近い速さで運動する電子を観測している．しかし光速をこえたことは一度もない．逆に物体の速さが光速に近づくと物体の慣性抵抗（慣性質量）は無限に大きくなることをわれわれは知っている．

アインシュタインによって引きおこされた旧来の時間概念の崩壊は，われわれの直観，空間や時間に対するわれわれの内的体験にとって，新たに困難な問題を作りだしたように見えるが，実はこれらの困難は今や容易に取りのぞかれる．ガリレイの相対性理論において原点 O を通る $t=0$ という平面が演じた役目をアインシュタインの理論では O から発射された光の円錐が代行する．この円錐が過去と未来を分離する．O から投げ出された物体の世界線の方向は必ず O から未来の方に開いた円錐の内部に向いていなければならない．(もし私が O に居れば，私自身の肉体の世界線，すなわち私の“生命線”の方向もまた未来向きの光円錐の内部に向いている)．O 点に起きた事件は，O から未来に向かう円錐の内部に在る世界点における現象にのみ，その影響を与えることができる．影響を与えうる領域の限界は，O から事件と同時に発射された光が真空中を伝播する

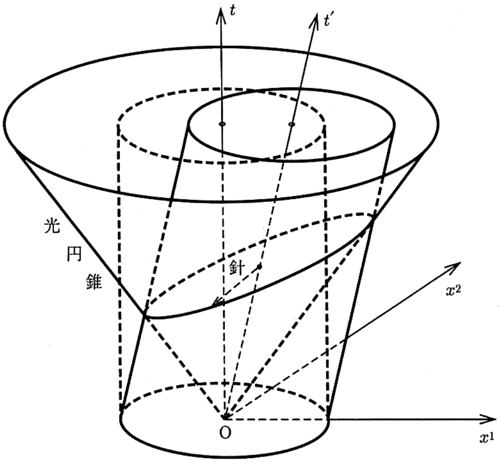
時の光の伝達範囲によってあたえられる．いま私が点 O に居るとすれば，O によって私の生命線は過去と未来に分離される．このことはガリレイの考えにしたがっても同じで，何の変更もない．しかし私と世界の関係については，事情はガリレイの相対論とはちがう．点 O における私の一切の行動が影響を与えることのできる世界点は，O より未来に向かう円錐の内部にある．この円錐の外部には，私とは孤立した，“それに対して過去における私の行為は影響を与えたかもしれないが，現在の私はもはやなんらの変化をも与えることのできない”すべての事件が存在する．したがって，**未来を向く円錐面は私の能動的未来を，能動的過去から分離する**．これとは反対に，私が現実に体験したか，あるいは，それについての何かの知らせを受けたような事件だけが，過去を向いた円錐の内部に在る．すなわち，私に影響を与えたかもしれないような事件のみがその内部にあ



第11図

る．これに対して，もし私の生命が無限に永く続き，またどんなに遠くの物でも見ることができるとすれば，私がこれから体験するであろう事件，または体験するかもしれない事件のすべては，この円錐の外側に在る．したがって**過去を向く円錐面は私の受動的過去を，受動的未来から分離する．**この円錐面上には私がいま，瞬間的に見る事件，また見ることのできる事件がのっている．したがって，それは本来，私の眼に映った外界（環境）そのものである．われわれは同時刻という抽象的な様式を具体的に作用という立場からみた関係におきかえた．これによりすべての表面的な，一見矛盾とも思われることは解消される！ アインシュタインの相対性原理の本来の，また基本的意義は，われわれが上に述べたような意味で，能動的，ならびに受動的過去と未来を区別すべきであるという点に在る．光円錐によって表現された世界の構造（それは世界点の間の作用的関係を規定する）をもとにして，この4次元連続体としての世界にどのような座標系を設けることが最も好都合であるか，また許容される種々の座標系どうしのあいだの変換はどのようなものか，といった問題は，上述の過去と未来の分離にくらべれば，多分に技術的な，二義的な問題である．

アインシュタインの立場からローレンツ収縮を直観的に理解するために，つぎのような平面上の問題を考えてみよう．標準座標系 t, x^1, x^2（空間座標のひとつを略す）を用いて時空内の現象を記述することにする．いま一枚の大き



第12図

なたいらな紙がこの標準系内に静止しているとする（この紙の上に，x^1, x^2 軸が引かれている）．この紙にはひとつの閉曲線 $\boldsymbol{C}$ が描かれている．別にひとつの円板が紙面の上に置いてあり（すなわち円板は紙の上に静止している），それには時計の針のように，一本の針が円板の中心点を中心として，回転できるように，備えつけてある．この針がゆっくり回転するとき，その先端は円板の縁を一周する．このことから，円板は，たしかに，その中心点を中心とするひとつの円であることがわかる．つぎにこの円板が前述の紙面上を静かに，一様の速度で並進するとしよう．そのあいだも，針はゆっくり回転をつづけるとすれば，針の先端は，

始終，円板の縁にそって動きつづけるはずである．したがって並進をしていても円板はやはり円形の板である．いまある瞬間に（紙面上に静止している人からみて），この移動している円板の縁が紙に描かれた曲線 C と完全に一致したとする．そこで C を紙面に静止している物さしで測定したとすれば，われわれは C が円ではなく，ひとつの楕円であることを発見するであろう．以上の事情は第 12 図にグラフ的に示されている．第 12 図で座標系 t', $x^{1\prime}$, $x^{2\prime}$ は，これを基準としたとき，これに対して円板が静止している座標系である．$t'=$ 一定 という平面と光円錐の交わりは，この (t', x') 座標系からみれば“瞬間的な円”である．いまこの切口を土台として，この上に t' 軸の方向を向いた円筒をたてれば，これの $t'=$ 一定 という平面による切口は (t', x') 座標系からみるとき，常に円である．この円筒は，われわれの円板が過去から将来にわたって占める世界の中の領域を示す．ところがこの円筒と，$t=0$ という平面との切口は第 12 図からわかるように，円ではなくて，ひとつの楕円である．この楕円を土台として t 軸の方向を向く楕円筒をたてれば，この筒面は，紙の上にかかれた曲線 C が時間的に世界の中に描く軌跡を示す．したがってローレンツ収縮はいわば，“**速度にもとづく遠近法**”の一種である．すなわち円板を遠くから，しかも斜めの角度から眺めると，それが楕円に見えるように，観測者の横を通りすぎる円板も観測者にはひとつの楕円のように見える．一般にある物の真実の形とは，それが静止している時の形をいう．すな

わちある標準座標系に対してその円板が静止しているとき，その座標系に静止している物さしで測った形が，この円板の真実の形である．円板が観測者の視線に対して斜めにおかれたとき，もしわれわれがこの円板は偏平に押しつぶされて，楕円になったといえば，それは正しくない．これと同様にアインシュタインの考えに従えば，円板が観測者に対して，相対的に運動しているために，その運動方向の長さが収縮したといったならば，それは正しい表現ではない．すべての物体の見かけの形は，それ自身の本来の形によるばかりでなく，それの状態，特に観測者に対する運動状態に依存する．

§ 23 相対性原理の分析．空間と時間の分離

アインシュタインの相対性原理はどのような仮定と，事実にもとづいているかについて，これからできるだけ注意深く解説をしてみよう．マイケルソンの実験によれば，任意の一様な並進運動をしている基準物体 K（これをわれわれはまたひとつの平らな板で示す）の上では比例関係式 (20) が，一定の c の値に対してなりたつことがわかる．A, B を K の上の二つの固定点とする．任意の時刻 t に A から発射された光が B に到達したとき，B の時計が $t+\dfrac{|AB|}{c}$ という時刻を指していれば，B の時計は，A のそれと同時刻に調整されている．これが二つの離れた場所に在る時計の“同時刻”の定義である．この定義の基礎となっている事実

から，逆にまた，A の時計は，B の時計に同時刻に調整されている（または略して A は B に同時刻にあわせられているという）ことがわかる．しかしわれわれにはさらにつぎの事実も必要である：もし，B が A に同時刻に調整され，また C が B に同時刻になっていれば，C は A にも同時刻であることが必要である．これは一体，何を意味するか？いま点 A に二つの時計が在るとする．B の時計を光の信号によって A の第 1 の時計と同時刻にあわせる．また C の時計を B のそれにあわせる．最後に A に在る第 2 の時計を C にあわせたとする．この場合，上述の主張によれば A に在る二つの時計は常に同じ時刻を示すことになる．ところで定義によれば，A に在る第 1 の時計の示す時刻が t の時に A から発射された光の信号が，全長 L の折線 ABCA を通過して再び A にたちもどったとき A に在る第 2 の時計が $t+\dfrac{L}{c}$ を指すように，第 2 の時計は調整されている．そこで上述の主張することは，光が A を出発してから再び A に帰着する間に，A における時間は L/c だけ経過するということである．この事実は単に“二角形”ABA，三角形 ABCA に対して成立するばかりでなく，任意の多角形コース ABC…A に対しても成立するべきであると主張することは妥当である．そこで第 1 の経験的事実として，まずつぎのことを容認する．

一様な並進運動をしている基準物体 K の上で，光を，任意のひとつの閉多角形の道（その全みちのりは L）にそって一周させたとき，それの一周に要する時間 τ は，L に比

例する：すなわち $\tau=L/c$ である．

以上のことから，ある基準物体上のすべての場所に，同じ時間 $t=x^0$ を賦与することが可能となる．つまりこの物体の各点に在る時計はすべて，上述の方法で互いに同時刻に調整することが可能となる．これらすべての時計はひとつの中心となる時計から光の信号によって，同時刻に調整される．この調整法はどの時計を中心に選んでも同じである．ここではっきりと注意しておくべきことは，この調整には，必ず K に静止している光源を用いることである．さてわれわれは $c=1$ となるように，長さと時間の単位をえらぶことができる．このように時計を調整すると，任意の場所から発射された光の信号を受信することにより，光がすべての方向に速さ 1 で伝播することがたしかめられる．同じ基準物体 K の上に在る二つの座標系は，つぎの三種類の演算を結合した変換によって互いに結ばれている：

$$x^{i\prime}=x^i+a^i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{22}$$

$$x^{i\prime}=\alpha x^i \qquad (\alpha>0), \tag{23}$$

および時間 x^0 は不変にたもち，空間座標 x^1, x^2, x^3 については直交変換（a^i，α はともに定数）．このような変換の全体から構成される群を，われわれは再び，基本群（elementare Gruppe）（前にもこの名前を使ったが，それを少し拡張したものが今回のものである）と呼ぶことにする．この群に属する任意の変換により，K の上に設置されたひとつの座標系は，それと同等な，K の上の他の座標系に移される．

特にこのことは（22）に対しては，わかりやすい．

経験的事実の第2はガリレイの慣性の法則である．**力が作用していない質点はKに対して一定の速度をもった直線運動をする**．これはもっと正確に，直観的につぎのように公式化される：ひとつの質点の軌道は，もし他の物体からこの質点におよぼすすべての影響がとり除かれているときは，Kに対してひとつの直線で表わされる．いまこの軌道の上に等間隔に点の列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ をしるし付け，また一般に点 A_i を質点が通過するとき，A_i に在る時計の示す時刻を t_i とすれば，$t_1, t_2, t_3, \cdots$ は時間的に等間隔となる．第1，ならびに第2の経験的事実を容認することは本来，つぎのように理解されるべきである．ある物体を基準としたとき，これら二つの事実がなりたつということは，その基準とした物体が"基準座標系を設置することを容認された物体[4]である"ことを保証するものであり，またその物体が"一様な並進運動をしている物体"であることを示すものである．また上述の二つの事実は，世界に起こる現象を，"容認"された基準物体を基準として記述することが必ずできることを主張している（このような基準物体は必ずしも現実に存在する必要はない．むしろ実在の物体からの理想的極限として構成されればよい）．

4）訳者注：ある物体Kを基準にしたとき，この上のすべての場所における時計の同時刻調整について本文の要請が満たされ，さらにガリレイの慣性の法則がなりたつとき，この物体を"容認された物体"またこの上に設けられた標準座標系を"容認された座標系"とか慣性（座標）系とよぶことにする．

そこで問題はつぎのことである．いま任意の二つの“容認”された基準物体 K, K′ と，これらの上に設けられた座標系 $(x^i), (x^{i'})$ が与えられているとき，これら両座標系の間の規則的関係を見つけるという問題である．この問題を物理学的に見とおしのよい方法で解決するためには，まず第一に，ガリレイの慣性の法則に対してひとつの補足をする必要がある．外力の影響をうけずに自由に運動している質点 m にひとつの時計をしばりつけたとする．この場合，質点が等しい距離を運動する間にこの時計が刻む“固有時間” s は等しいことを主張すべきである．写像 $\overline{x}^i = x^i + \varDelta a^i$（$\varDelta a^i$ は質点 m の世界線上の二つの点の座標の差）によって，K の上に設けられたひとつの座標系 x^i から，これと同等な他の座標系 $\overline{x}^i$ が生まれる．それと同時にいまわれわれが問題にしている現象（つまり外力が作用していない質点 m の並進運動）は，この写像によってそれ自身の上に移される．そこでこの質点の世界線上の一部分 AB が，上述の写像によって同じ世界線上の一部分 $\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}$ に移されたとすれば，質点に結びつけた時計が示す AB の間の経過時間は，$\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}$ の間の経験時間と当然一致すべきである．これは“一様性”からの自明な結論である．そこで，m の運動を示す 4 個の世界座標 $x^i(s)$ は，どれも**固有時間 s の一次式**であることがわかる．

そこで他の容認された基準物体に設けられた座標系 $x^{i'}$ と，もとの座標系 x^i の関係は，もし質点の位置を示す x^i がその固有時間 s の一次式ならば，$x^{i'}$ 系でも，この質点

の運動を示す式 $x^{i'}$ は s の一次式となるように，x^i と $x^{i'}$ が結ばれねばならない．このことから直ちに両者の関係は線形変換であることが導かれる．そこで（22）の形の変換を別にすれば，ここに導かれた変換は

$$x^{i'} = \sum_{k=0}^{3} \alpha^{i}{}_{k} x^k \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (24)$$

この式から，K′ 自身も K に対して一様な並進運動をしていることがわかる．ここでさらにわれわれが用いなければならないもうひとつの基本的事実は“光速度不変の原理”である．すなわち１点 O から**発射された光の信号を受信することができる世界点は O のみによってきまり，光源の運動には無関係である**．K の上に静止している光源から発射（その世界点を O，その座標を $x^i = 0$ とする）された光の信号は，ただ

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0, \qquad x^0 > 0$$

を満足する座標をもつ世界点のみを通過する．また K′ 上に静止している光源による光の信号が世界点 O（この座標はまた $x^{i'} = 0$ でもある）から発射されるとき，この信号は

$$-(x^{0'})^2 + (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2 = 0, \qquad x^{0'} > 0$$

を満足する座標 $(x^{i'})$ をもつ世界点のみを通過する．光速度不変の原理によれば光源の運動状態には無関係に光は伝播するから，これら二つの光円錐は同じものであるはずである．それには変換（24）が単位の変換（23）およびローレンツ変換の組み合わせからできているときにかぎり両光円錐の一致が可能となる．ここで**ローレンツ変換**とは（24）

の形の変換で，さらに二次形式

$$-(x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 \tag{25}$$

を不変に保ち，そのうえ，$\alpha^0{}_0>0$ であるものをいう．[最後の $\alpha^0{}_0>0$ という不等式についてはつぎのことに注意すべし．すなわち（25）が不変という条件から

$$(\alpha^0{}_0)^2-(\alpha^1{}_0)^2-(\alpha^2{}_0)^2-(\alpha^3{}_0)^2=1$$

がなりたつ．したがって $(\alpha^0{}_0)^2 \geqq 1$，そこで必ず $\alpha^0{}_0 \neq 0$]．変換（22），（23）およびローレンツ変換を一緒にした変換の全体は群をなす．これを**ローレンツ－アインシュタイン群**と呼ぶことにする．

最後に本来の相対性原理の主張することについて述べる：すなわち，**任意の物体 K′ が，ひとつの容認された物体 K に対して一様な並進運動をしているときは，K′ 自身もまた容認された基準物体のひとつである．K を基準としたとき，そこにくりひろげられるすべての自然現象とまったく同じものが，K′ を基準としたときにも，同様におこる．**これにより，さきに提示したわれわれの問題は，ローレンツ群の設立によって解決されたことがわかる．またこれ以上条件を付け加える必要のないこともわかる．なんとなれば，ローレンツ－アインシュタイン群に属する変換のうちで，時間軸を固定するものだけに限れば，基本群に属する変換となるからである〔もしこれ以上の条件をつけて，ローレンツ－アインシュタイン群をせばめたならば，時間軸を固定したとき，基本群の変換のすべてを導き出し得ないことになる：訳者〕．

以上のような経験的関係からアインシュタインの相対性原理は必然的に生まれる．しかしそのようにして得られた理論においては，原理自身が剛体とか時計のふるまいについての要請と結びついた形でいい表わされている．しかし実際は，それらの物は原理とは関係のないものである．そこでこれから二つの物を原理の組み立てからはずすことにしよう．今までの議論の展開の跡をたどるとき，ある座標系が標準座標系であることを確認するために，またそのときに限り，光の伝播や自由粒子に縛りつけた時計の自由な運動が必要であることがわかる．この確認法はつぎのようにいい表わされる：いま，ある座標系を基準としたとき，世界点 $O=(\overset{0}{x}{}^i)$ から発射された光の信号が到達することのできる点 x^i が，O から未来に向かう光円錐の方程式

$$-(x^0-\overset{0}{x}{}^0)^2+(x^1-\overset{0}{x}{}^1)^2+(x^2-\overset{0}{x}{}^2)^2+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)^2=0,$$
$$x^0-\overset{0}{x}>0 \tag{26}$$

を満足し，また自由粒子の世界座標 x^i が，その固有時間の一次式で表わされるとき，この座標系 (x^i) は容認された標準座標系である．われわれはすでに，任意の二つの座標系がともに上述の意味で標準座標系ならば，これらはローレンツ－アインシュタイン群により結ばれることを示した．上のような標準系の識別法により剛体が理論の基礎からはずされたことがわかる．ところでわれわれは数学的考察をなるべく簡単な見透しのよいものとするために，自由運動をする質点に時計を結びつけるという技巧を用いた．したがって時計という道具も基本的には余計なものであることが

わかる．そこでこれから，現実の 4 次元世界で，世界点 O から発射された光の信号が通過するすべての世界点の集合を“O を頂点とするゼロ円錐”（Nullkegel，光円錐のこと）と呼ぶことにする．また外力の作用を受けない自由粒子の描く世界線を“時間的直線”（zeitartige Gerade）と呼ぶことにする．座標 x^i を導入すると，現実の世界は 4 次元数空間に写像される．すなわち 4 個の実数の組 (x^0, x^1, x^2, x^3) からなる連続体により表わされる．この数空間において，点 $(\overset{0}{x}{}^i)$ から未来に向かう“数空間のゼロ円錐”とは (26) で定義された図形を示す．また“数空間の時間的直線”とは，ひとつのパラメーター s の一次式

$$x^i = \overset{0}{x}{}^i + \gamma^i s$$

で表わされる 1 次元連続体をさす．ここで γ^i は直線の方向を示し，

$$-(\gamma^0)^2 + (\gamma^1)^2 + (\gamma^2)^2 + (\gamma^3)^2 < 0$$

を満足するものとする．これらの言葉を用いると，われわれが最終的にはそれに依存せねばならない経験的事実は，つぎのように表わされる：**われわれは世界に対して，つぎのような 4 次元座標 x^i を導入することができる．すなわち世界は 4 次元数空間で表わされ，現実世界におけるゼロ円錐は数空間のゼロ円錐に，また時間的直線は，数空間の時間的直線に写像される．**ここに述べたような座標系 (x^i) からローレンツ変換によって導かれる座標系は，すべてまた上の条件を満足する．また，上に述べた条件から，これを満足する座標系 x^i は，ローレンツ群に属する変換にもと

づく不定性[5)]を除いては一意的に決定されることが数学的に証明できる．また射影幾何学の基本定理をもとにして，つぎのことが証明される：数空間において，ゼロ円錐をゼロ円錐に，時間的直線を時間的直線に移す 4 次元数空間の自分自身への写像はローレンツ - アインシュタイン群に属する変換にかぎられる [10]．この場合，写像というときは，それは，世界のある有限部分，ならびに数空間の有限部分についての写像を意味し，全世界，全数空間について論じているのではないことに注意すべきである．全世界について写像を考える必要はない．以上からつぎのような二つの簡単な自然法則がなりたつことがわかる：

1．“光は同心球面状に，速さ 1 で伝播する．”

2．“外力が作用していない自由物体は一定の速度をもった直線軌道を描く．”

この二つのことだけで，座標系が容認された標準座標系かどうかを判定するのには十分である．しかしこれら二つの自然法則のほかに，さらにどのような他の自然法則を補助として付け加えても，それによって標準座標系のうちからさらに特別なものを選びだすことはできない．すべての自然法則は任意の二つの標準座標系のどちらでもまったく同様になりたつ．

---

5)　訳者注：すぐ前に述べた通り，この条件を満足する座標系は幾通りも在り，それらは互いにローレンツ変換によって結ばれている．この意味で上の条件だけから座標系を一意的にきめることはできない．

このようにしてわれわれは**世界幾何学**（Weltgeometrie）を手にいれたことになる：すなわちこの世界は第 I 章の意味における 4 次元アフィン多様体である．さらにこの多様体には 3 個の正次元，および 1 個の負次元をもった基本二次形式 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})$ により定義された計量が賦与されている．この基本形式自身は単位の選択に依存する．しかし 2 個の世界ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の "大きさ" が等しいこと，つまり

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y})$$

で表わされる関係は座標系のとりかたや，単位のきめ方に無関係な客観的意味をもつ．またこの二次形式に対応した対称双一次形式

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=0$$

で表わされる $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の間の関係，つまり $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が**直交**するということも客観的な意味のあることである．なお $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})>0$ の時 $\boldsymbol{x}$ は**空間的ベクトル**，また $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})<0$ のとき，**時間的ベクトル**と呼ばれる．

ある容認された基準物体の上に在る有限の線分は世界の中に細長い帯を描く．この帯の縁は互いに平行で，その方向は時間的である．この線分の長さ l が帯の幅である．それは

$$l^2=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})$$

で与えられる．ここに $\boldsymbol{x}$ は帯の縁に垂直で，一方の縁から他の縁に向かうベクトルを示す（これは必然的に空間的ベクトルである）．同じ基準物体上に在る長さが等しい二つの線分は，世界の中に二つの帯を描き，これらの幅は互いに

等しい．上の例では同じ基準物体の上に在る線分どうしを比較した．一般に基準物体Kの上に静止している二つの物さしの長さをくらべることは可能である．同様にまた，Kに対して一様な並進運動をしている第二の基準物体K′の上に静止している物さしどうしを比較することもできる．しかしKの上にあった剛体の物さしをK′に移すとき何がおこるかについては，ここで私は何も質問しなかった．しかしこの質問に答えることはいまや容易にできる：**それの“静止の長さ”，つまりそれの世界線が描く帯の幅はKからK′に移しても不変である．**KからK′へ移す前と後の静止の長さの比λは，K′のKに対する相対速度vに一般には依存することができよう：$\lambda=\lambda(v)$[6)]．しかしこの物さしを後に再びK′からKにもどしたとすれば，その静止の長さはもう一度$\lambda(v)$倍される．なんとなれば，KのK′に対する相対速度もvである（これについてはつぎの節で計算してみせる）．したがって再びKに静止している物さしの長さは，以前，Kに静止していた時の長さの$\lambda(v)^2$倍となる．ところで基準物体Kの上のある場所に静止している物さしを，同じKの上の他の場所に静止している物さしの長さとくらべるには，前者をたとえば，ソリK′にのせて，後者の位置まで運ばねばならない．離れた場所に静止している物さしの長さが等しいということについての物理的定義はこのような操作にもとづいている．したがって

---

6)　訳者注：（移動後の静止の長さ）$=\lambda(v)\times$（移動前の静止の長さ）とする．

$\lambda^2(v)=1$，$\lambda(v)=1$ でなければならない[7)]．これにより，われわれは，剛体が世界の計量に対してどのように対応すべきかを実際的に十分な程度に決定したことになる．

アインシュタインの相対性理論では剛体という概念にはある種の困難がともなっている．いま最初，静止していたひとつの剛体に，ある瞬間に，同時に，数個所で，他の物体が衝突したとする．その結果剛体の中の衝突を受けた部分は運動をはじめる．しかし作用は光速度以上の速さで伝播することはできないから，はじめ一部におきた運動は次第に物体の残りの部分全体にひろがる．しかし個々の衝突点から光速度をもってひろがる球面が互いに重なり合うようになるまでは，衝突点ならびに，それと一緒に運動するその近傍は，個々の衝突点ごとにそれぞれ独立な運動を行なう．したがって相対性理論では剛体というものは，その本来の意味においては，存在を許されない．すなわち，どのような作用を受けても，常に客観的に同じ形をもっているような物体は，相対性理論ではありえない．それでは，われわれは空間の長さの測定に物さしをどのように使えばよいか？　比喩を使って説明しよう．ひとつの容器にはい

---

7) 訳者注：K 上の点 A にあった物さしをソリにのせて，B まで運び，B にあった物さしとくらべたとき，両者の長さが等しいとすれば，$l_B=\lambda(v)^2 l_A$．l_A は A にあったときの長さ，l_B は B の物さしの長さである．“等しい” という概念は相互的であるはずだから，逆に B の物さしを A まで運んできて A とくらべても等しいはずである．そこで $l_A=\lambda(v)^2\cdot l_B$ この両関係式がなりたつためには $\lambda(v)=1$ でなければならない．

った平衡状態にあるガスを，数個所から同時に細い焔で熱した後に，焔からはなして，それを断熱状態のまま放置したとする．その場合，ガスは，熱力学の平衡の法則を満足しない複雑な種々の状態をつぎつぎに経過する．そして最後には新しい平衡状態にたどりつく．この状態は加熱の結果，以前よりはエネルギー的に高い状態である．剛体の物さしについても同じことがいえる：すなわちひとつの剛体からできている物さしが，ある容認された基準物体上に静止しているときの長さ，またそれが十分に永い間，一様な並進運動をしているとき，いずれの場合にも，その静止の長さは同じである．それらの描く世界線の作る帯の幅は等しい．ひとつの運動状態から他の運動状態に移行するあいだに物さしに何が起こったかについては，われわれは考慮を払う必要はない．上に述べた比喩では，もし十分にゆっくりと，厳密にいえば，無限に永い時間をかけてガスを加熱するならば，それは常にあらゆる瞬間に熱力学的平衡状態をつぎつぎに経過しながら，徐々にその温度が上昇してゆく．同様に物さしを急に動かさないようにすれば，それはあらゆる瞬間にいつも静止の長さを保持することになる．この仮定が大きな失敗を引きおこさないためには，許されうる加速度の限界が非常にきびしく制限されていることはもちろんである．しかしこれについての最終的な，また正確な答は，物理学や力学の法則にもとづいて作られた剛体の力学によってはじめてあたえられることができよう．

ひとつの時計は一様な運動をするとき，1本の時間的直

線をえがく．いまこの時計が，1 周期のあいだに経過した世界線の部分，つまり世界ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすれば，

$$\tau^2 = -(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$$

によって与えられる正の数 τ は，時計の固有周期である．**ひとつの時計は，任意の容認された空間内において静止しているときは，常に同じ固有周期をもつ．**時間の測定に時計を利用するのは，まさにこのことにもとづく．いま特に簡単な構造をもったアインシュタインの“光時計”を考えてみよう．これは 2 枚の小さな鏡が向かいあって固定されたもので，これらの鏡の間を光が往復する装置である．この周期は光が 1 往復する時間である．この簡単な時計に対しては，鏡と鏡の間を結ぶ剛体の性質（と光速が光を発射したり反射したりする物体の運動状態には無関係という事実）から上の主張のなりたつことが導かれる．また一様な並進運動をしている物体の上に静止している時計のふるまいが，その構造だけできまり，その過去の履歴には無関係ならば，このようなすべての時計についても，光時計と同じように，上述のこと（固有周期の同一性）はなりたつべきである．“原子時計”については，上述のことが非常に高い精度で成立することをわれわれは知っている．この時計の周期は，原子から放出される光の振動数を使ってそれを読みとる．たとえば互いに相手に対して相対的に静止している 2 個の水素原子を考えてみよう．これらの過去の歴史がどんなものであっても，両者のスペクトルは，非常に大

きな精度で一致する．

物理的な関係を直観的に説明するためには，任意の容認された基準物体を手がかりとして，世界を空間と時間に分離することは欠くことのできない手段である．基準物体上のすべての点の位置は世界の中における互いに平行な直線で記述される．上に述べた時間と空間の分離は，この直線の方向 e にのみ関係がある．方向 e をもったひとつの直線上の世界点は基準物体上の同一の空間点を示す．したがって幾何学的にいうならば，時間と空間の分離とは，**平行射影**を扱うことにほかならない．この問題を適切に数式化するために，前もって，任意の n 次元アフィン空間（これを“世界”とよぶことにする）に関する二，三の幾何学的な議論をまず行なうことにする．まず直観的にわかりやすいから，$n=3$ の場合について考えよう．この世界のなかにはひとつのベクトル e $(\neq 0)$ に平行な直線の集団を引くことができる．いま“世界”の中で，この直線の方向に目を向ければ，このような1本の直線の上に上下に並ぶすべての“世界点”は，この人にとってはすべて重なって同一点に見える．この場合，ひとつの平面を用意して，その平面上に射影するというようなことをする必要はない．そこでつぎのように定義する：

0でないひとつのベクトル e が与えられているとする．任意の2個の“世界点” A, A' をとり，$\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ が e にある数をかけたものと一致するときは，A, A' はともに，e によって規定されるある“空間”の1点 $\underline{\mathrm{A}}$（しかも同じ点）に射

影されるという[8]．われわれは $\underline{\mathrm{A}}$ を $\boldsymbol{e}$ に平行な直線で表わすことができる．この直線上には，上に述べた“空間”内の同一点に重なって射影された“世界点” A, A′, …等がのっている．“世界”の任意の変位 $\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{e}$ に平行な 1 本の直線を再び，$\boldsymbol{e}$ に平行な他の 1 本の直線に移すから，この $\boldsymbol{x}$ は，“空間”の中のひとつのきまった変位 $\underline{\boldsymbol{x}}$ を引きおこす．しかし“世界”における二つの変位 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}'$ の差が $\boldsymbol{e}$ に数をかけたものに等しいときは，これらの引きおこす“空間”内の変位 $\underline{\boldsymbol{x}}$，$\underline{\boldsymbol{x}}'$ は同じものとなる．“世界”から“空間”への移行，つまり $\boldsymbol{e}$ の方向に射影することを，文字の下に ＿ を引くことによって示すことにする．すなわち，射影によって A は $\underline{\mathrm{A}}$ に，また

$$\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{はそれぞれ}$$

$$\lambda\underline{\boldsymbol{x}},\ \underline{\boldsymbol{x}}+\underline{\boldsymbol{y}},\ \overrightarrow{\underline{\mathrm{A}}\,\underline{\mathrm{B}}}\text{に射影される．}$$

すなわち，射影という操作はアフィン的性格をもち，“空間”は，もとの“世界”より 1 次元だけ低い次元数のアフィン幾何学が成立する連続体である．

もし“世界”に，ユークリッド的意味の計量が規定されているならば，つまり計量の基本形式として，縮退していないひとつの二次形式 $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})$ ——ここで直観的にわかりやすいように，まず正定符号の二次形式の場合を扱う．し

8)　訳者注：もしここでいう一般的な“世界”が，われわれの時空であり，$\boldsymbol{e}$ が時間軸に平行なベクトルならば，ここにいう“空間”とは，われわれの 3 次元空間そのものになる．

かしここに述べることは，縮退していない一般の二次形式についても成立する——を用いるとすれば，“空間”のなかの 2 点の間の距離としては，この 2 点をそれぞれ射影点にもつ，もとの“世界”のなかの $\boldsymbol{e}$ に平行な 2 本の直線の間の垂直距離であると定義する．以上のことを数式で表わしてみよう．まず $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=e\neq 0$ と仮定する．任意の変位 $\boldsymbol{x}$ は必ずつぎの形に，しかも一意的に分割される：

$$\boldsymbol{x}=\xi\boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}^{*}. \tag{27}$$

この第 1 項はもちろん $\boldsymbol{e}$ に平行な部分，また第 2 項は $\boldsymbol{e}$ に垂直な部分を示す．すなわち

$$(\boldsymbol{x}^{*}\cdot\boldsymbol{e})=0, \qquad \xi=\frac{1}{e}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}). \tag{28}$$

この ξ を変位 $\boldsymbol{x}$ の“時間成分”($x=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とするとき，ξ は B と A の“時刻”の差を示す)[9] と呼ぶことにする．また

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})=e\xi^{2}+(\boldsymbol{x}^{*}\cdot\boldsymbol{x}^{*}) \tag{29}$$

がなりたつ．$\boldsymbol{x}$ は，その時間成分 ξ と，$\boldsymbol{x}$ が“空間”の中に誘起する変位 $\underline{\boldsymbol{x}}$ によって完全に決定される．このことを

$$\boldsymbol{x}=\xi\,|\,\underline{\boldsymbol{x}}$$

で表わす．これによって“世界”は“時間”と“空間”に分割されたことになる．すなわち“世界”の中の 2 点の位置の違い $\boldsymbol{x}$ は時間の違い ξ と，“空間”の中の場所の違い $\underline{\boldsymbol{x}}$ に分けられる．単に“世界”の中の 2 点の位置の一致につ

9)　訳者注：ここで考えている n 次元“世界”がわれわれの 4 次元時空であり，$\boldsymbol{e}$ が時間軸を指すベクトル，$e=-1$ ととれば，ξ は文字通り時間成分となる．

いて語ることが意味があるばかりでなく，このような“時間・空間”へ分割された段階では，“空間”内の位置の一致，ならびに，“同時刻”についても，それらは意味をもつことになる．“空間”内における任意の並進 $\underline{\boldsymbol{x}}$ は，“世界”のなかで $\boldsymbol{e}$ に垂直なただひとつの並進 $\boldsymbol{x}^*$ を誘起する．この $\underline{\boldsymbol{x}}$ と $\boldsymbol{x}^*$ の間の関係は1対1で，アフィン的である．さらに，$(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{x}})$ を

$$(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{x}})=(\boldsymbol{x}^*\cdot\boldsymbol{x}^*)$$

によって定義することにより，$(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{x}})$ を用いて“空間”に計量を与えることができる．このようにすれば，(29) はピタゴラスの基本式となる：

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})=e\xi^2+(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{x}}). \tag{30}$$

2個の変位 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ については，(30) から容易に

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=e\xi\eta+(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{y}}) \tag{30'}$$

が成立することがわかる．

現実の4次元世界（時空）では，$\boldsymbol{e}$ として，未来をさす時間的ベクトルをとり，さらに $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=-1$ のように規格化する．そこでさきに述べた一般論の $e=-1$ とおけばよい[10)]．世界を空間と時間に分割することにより導かれる，二つの事件の間の空間的距離，ならびに時間差は，以下に述べるような条件を満足する容認された任意の基準物体Kの上の物さし，およびK上の各点で同時刻に調整された時計の示す，距離や時間差と一致する．その条件とはK上の

10)　もし伝統的な C.G.S. 単位系を使うなら $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=-c^2$，$e=-c^2$ とすればよい．

各点の描く世界線はすべて $\boldsymbol{e}$ に平行な直線であり，$\boldsymbol{e}$ の方向に世界を平行射影することにより生れる“空間” $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中に，このKは静止していることである．

特殊相対性理論の考え方の基礎に対する厳密な分析はこのぐらいで終わりとして，いよいよこの理論の展開と，その物理学的に重要な結論に議論をすすめよう．

§ 24　相対論的幾何学．運動学および光学

われわれはこれから世界をベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}', \cdots$ の方向につぎつぎに時・空分割することを考えねばならない．ただし，$\boldsymbol{e}$（$\boldsymbol{e}', \cdots$ 以下も同様）は未来を指す時間的世界ベクトルで，$(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=-1$ に規格化されているものとする．

いまKは空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ に，また K' は $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ に静止している基準物体とする．K' は $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中で一様な並進運動を行なっている．いま $\underline{\mathrm{R}}_e$ において，すなわち，$\boldsymbol{e}$ の方向への時間と空間の分割に対して，世界ベクトル $\boldsymbol{e}'$ が

$$\boldsymbol{e}' = h \mid h\underline{\boldsymbol{v}} \tag{31}$$

に分割されたとする．これは，物体 K' が，$\underline{\mathrm{R}}_e$ から見るとき，時間 h のあいだに，空間的変位 $h\underline{\boldsymbol{v}}$ を行なうことを意味する．つまり $\underline{\boldsymbol{v}}$ は，$\underline{\mathrm{R}}_e$ から見たときの K' の3次元的速度ベクトルである．あるいは K' のKに対する3次元的な**相対速度**を示す．この大きさ v は $v^2=(\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}})$ によって与えられる．(28) によれば

$$h = -(\boldsymbol{e}'\cdot\boldsymbol{e}). \tag{32}$$

また (30) により

$$1 = -(\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}') = h^2 - h^2(\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}}) = h^2(1-v^2).$$

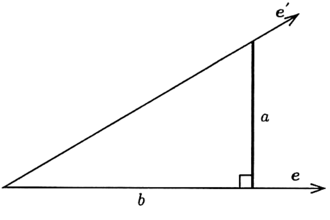
したがって

$$h = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{33}$$

K′ が，その運動の途中の二つの瞬間（固有時間で表わして，s と $s+\Delta s$）の間に移動した 4 次元的変位（世界点の変位）は $\Delta s \cdot \mathbf{e}'$ である．これを (31) にしたがって時間と空間に分割すると，$\underline{\mathrm{R}}_e$ を基準として K′ の運動を眺めたとき，上述の二点間の時間差 Δt は $\Delta t = h \cdot \Delta s$ となる．つまり Δt と固有時 Δs の間には

$$\Delta s = \Delta t\sqrt{1-v^2} \tag{34}$$

の関係がある．(32) は $\mathbf{e}$ と $\mathbf{e}'$ について対称的であるから，(33) によってつぎのことがなりたつ：K′ の K に対する**相対速度の大きさは，K の K′ に対する相対速度の大きさに等しい**．しかしベクトル的な相対速度自身については互いにくらべることはできない．なんとなれば，一方は空間 $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ の中で，他は別の空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中で定義されたベクトルで



第13図

あるから．上述のことを普通の幾何学の言葉を用いていいい表わせばつぎのようになる．方向 $\boldsymbol{e}$ に対する方向 $\boldsymbol{e}'$ の“勾配”を第 13 図の $v=\dfrac{a}{b}$ で示すことにすれば，$\boldsymbol{e}$ に対する $\boldsymbol{e}'$ の勾配は，$\boldsymbol{e}'$ に対する $\boldsymbol{e}$ の勾配に等しい．

つぎに，三つの時間的ベクトル $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の方向への分割を考える．K_1, K_2 はそれぞれ，空間 $\underline{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{e}_1}$，$\underline{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{e}_2}$ に静止している基準物体とする．これらを空間 $\underline{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{e}}$ から見たとき

$$\boldsymbol{e}_1 = h_1 \mid h_1 \underline{\boldsymbol{v}}_1 \quad ; \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_1)^2}},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = h_2 \mid h_1 \underline{\boldsymbol{v}}_2 \quad ; \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_2)^2}}$$

のように分割されたとする．上の式から

$$-(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) = h_1 h_2 \{1-(\underline{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{v}}_2)\}$$

がなりたつ．上の分割から，$\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ の，$\underline{\mathrm{R}}_{\boldsymbol{e}}$ から眺めたときの速度ベクトルは $\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2$ であり，その大きさが v_1, v_2 であることがわかる．また $\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2$ の間の角を ϑ，$v_{12}=v_{21}$ を K_2 の K_1 に対する相対速度の大きさ（$=\mathrm{K}_1$ の K_2 に対する相対速度の大きさ）とすれば，上の式から

$$\frac{1-v_1 v_2 \cos\vartheta}{\sqrt{1-(v_1)^2}\sqrt{1-(v_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v_{12})^2}} \tag{35}$$

がなりたつ．この結果から，**二つの物体の相対速度はそれぞれの物体の速度から決定される**．これを幾何学の言葉でいい表わせば，$\boldsymbol{e}_1$ の $\boldsymbol{e}$ に対する勾配 v_1，および $\boldsymbol{e}_2$ の $\boldsymbol{e}$ に対する勾配 v_2，さらに二つの平面 $[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}]$，および $[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}]$ の間の角 ϑ が与えられていれば，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の間の勾配が決定

されるということになる．つまりこれは三つの面をもった角錐に対する三角関数の公式を扱っていることになる．しかし距離の基本形式が定符号でないために，1点から突き出た3本の直線に対して，球的幾何学ではなくて，ボーヤイ－ロバチェフスキー型の幾何学にもとづく三角関数の公式が成りたつ．実際，この事情に対応して任意の速度の大きさ v (<1) に対して[11)]

$$v = \mathrm{tgh}\ u$$

とおけば，(35) は“余弦法則”

$$\cosh u_1 \cdot \cosh u_2 - \sinh u_1 \cdot \sinh u_2 \cdot \cos\vartheta = \cosh u_{12}$$

となる．

時間と固有時間の間の関係式 (34) のほかに，長さと静止の長さの間のこれに似た関係式がある．これを求めるためにまず基準空間 R_e を基礎にとることにする．あるきまった瞬間〔訳者注：e を時間軸とする座標系からみた時刻＝一定の瞬間〕に，物体 K′ の個々の構成部分〔これを質点とよぶことにする〕が世界点 O, A, … にあるとする．これらの点の $\underline{\mathrm{R}}_e$ への射像を $\underline{\mathrm{O}}, \underline{\mathrm{A}}, \dots$ とすれば，今考えている瞬間には，上述の質点が，実際 $\underline{\mathrm{O}}, \underline{\mathrm{A}}, \dots$ にあると考えてもかまわない．つまり O, A, … はその写像点 $\underline{\mathrm{O}}, \underline{\mathrm{A}}, \dots$ とこの瞬間には一致しているものとする．これらの点は $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中のひとつの図形を形作る．さらにこの $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中に，その瞬間

11) tgh=hyperbolic tangent.

にこの形を刻みこめば，たとえ K′ がその後，そこから立ち去っても，$\underline{\mathrm{R}}_e$ に刻みこまれた形は $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中に静止したまま残る．この残像の描く世界像が第 14 図の直線 $\mathrm{O}\underline{\mathrm{O}}$，$\mathrm{A}\underline{\mathrm{A}}$ である．前々節に述べた紙面上の閉曲線 C がここの $\underline{\mathrm{R}}_e$ に刻みこまれた図形に相当する．また一様な並進運動をする回転指針をもつ円板がここの物体 K′ に相当する．つぎに空間 $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ を考える．物体 K′ はこの空間のなかに静止しているとする．世界点 O, A, … の $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ 上への射影を $\underline{\mathrm{O}}', \underline{\mathrm{A}}', \cdots$ とする．これらの点は全体として K′ の静止のときの形を表わす（世界線の方向が互いに“直交”するものを，第 14 図では，垂直に交わる直線で図示している）．図形が刻みこまれてある $\underline{\mathrm{R}}_e$ の部分と，$\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ にある K′ の静止図形の間には，ひとつの写像関係が存在する．これによって一般に点 $\underline{\mathrm{A}}$ と $\underline{\mathrm{A}}'$ の間に相互的な対応がつけられる．この写像はあきらかにアフィン写像である［実際これは正射影（orthogonal Projection）にほかならない］．ところで世界点 O, A は“同時刻”だから，$\boldsymbol{e}$ による時・空分割に対して

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{x} = 0\,|\,\underline{\boldsymbol{x}}$ （$\underline{\boldsymbol{x}}$ は $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中のベクトル），$\underline{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\underline{\mathrm{O}}\,\underline{\mathrm{A}}}$

ところで基本公式（30）により

$$(\overline{\underline{\mathrm{O}}\,\underline{\mathrm{A}}})^2 = (\underline{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}).$$

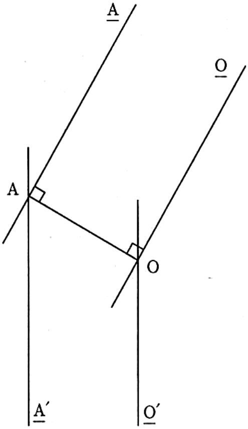
同様に

$$(\overline{\underline{\mathrm{O}}'\underline{\mathrm{A}}'})^2 = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}')^2.$$

ところで（31），（30′）から

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}') = h(\underline{\boldsymbol{x}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}}).$$

したがって



第14図

$$(\overline{\underline{\mathrm{O}}'\underline{\mathrm{A}}'})^2=(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{x}})+\frac{(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}})^2}{1-v^2}.$$

いま $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中に $\underline{\mathrm{O}}$ を原点とする直交座標系 x^1, x^2, x^3 を設けたとする．ただしこの x^1 - 軸は，速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ の方向に一致するように選ぶ．いま $\underline{\mathrm{A}}$ の座標を x^1, x^2, x^3 とすれば

$$(\overline{\underline{\mathrm{O}}\,\underline{\mathrm{A}}})^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2.$$

したがって

$$(\overline{\underline{\mathrm{O}}'\underline{\mathrm{A}}'})^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+\frac{(v\cdot x^1)^2}{1-v^2}$$
$$=\frac{(x^1)^2}{1-v^2}+(x^2)^2+(x^3)^2.$$

いま

$$x^{1'}=\frac{x^1}{\sqrt{1-v^2}},\quad x^{2'}=x^2,\quad x^{3'}=x^3 \qquad (36)$$

とおけば

$$(\overline{\underline{\mathrm{O}}'\underline{\mathrm{A}}'})^2=(x^{1'})^2+(x^{2'})^2+(x^{3'})^2$$

となる．そこで $\underline{\mathrm{R}}_e$ のなかの任意の点（x^1, x^2, x^3）には $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ の中の点（$x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$）が対応する．ここで $x^{i'}$ と x^i の関係は（36）であたえられる．つまりこれは $\underline{\mathrm{R}}_e$ に刻みこまれた映像を，その運動の方向に $1/\sqrt{1-v^2}$ 倍だけ拡大することによって，$\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ 内にある静止の形が求められることを示す．換言すればこの“拡大”によって，映像は K' の静止の形と合同な図形に移される．これが**ローレンツ収縮**である．特に物体 K' がある瞬間，空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中で占める体積 V と，その静止の体積 V_0 の間には

$$V=V_0\sqrt{1-v^2}$$

の関係がなりたつことになる．

測量器を用いて光学的に角度を測定する場合は，測量器は基準にとる空間の中に静止しているものとする．すなわち2本の光線の間の角がこの空間の中に静止している剛体で造られた測量器を使って測られる．**もしこの光学的測量器をある人の眼におきかえるならば，その人の視野の中に在る対象について，この観測者が直観的にとらえた対象物の形は，その人の視角（これは上述の測量器で測られる角に相当する）によって決定される．**そこで幾何学と，幾何学的な量の観測の間の関係を確立するために，ここで光学的な関係についてもう少し立ちいって考えてみよう．

容認された基準空間に静止しているエーテル（つまり真空中の場合），または一様な媒質中における光線を示すマックスウェルの方程式の解では，電磁場の成分はすべて（複素数を用いて表わしたとき）

$$= (\text{定数})\cdot \exp[2\pi i\Theta(\mathrm{P})]$$

の形をしている．ここで $\Theta=\Theta(\mathrm{P})$ は波の“位相”を表わし，これに加えてもよい任意の定数をのぞけば，それは世界点のひとつのきまった関数である．世界点の座標に対する任意の一次変換を行なっても，電磁場の成分は新しい座標系において同じ位相 Θ をもった，上と同じ形の関数で表わされる．したがって位相は一次変換に対して不変である．もし光を吸収する媒質を考えないことにすれば，平面波に対しては，位相関数は世界点 P の座標の一次実関数となる．したがって任意の二つの世界点 A，B における位相差 $\Theta(\mathrm{B})-\Theta(\mathrm{A})$ は，$\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AB}$ の一次式となる．または上述の不変性を考えにいれれば，これは $\boldsymbol{x}$ を変数とするひとつの 4 次元共変ベクトルである〔訳者注：つまり Θ は $\boldsymbol{x}$ の一次式で，その係数は共変ベクトルの成分である〕．この光線に対応する“変位” $\boldsymbol{l}$（これを簡単に“光線 $\boldsymbol{l}$”と呼ぶことにする）[12)]を使ってこの共変ベクトル（つまり位相差）を表わすと

$$\Theta(\mathrm{B})-\Theta(\mathrm{A}) = (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{x})$$

のようになる．波の伝播の経過を幾何学的に表現するのには，互いに平行な“位相面”の集団を考えるのが最も好都合である．すなわち

$$\Theta = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

という集団である．いま時間的ベクトル $\boldsymbol{e}$ によって時・空分割を行ない，これに応じて $\boldsymbol{l}$ は

$$\boldsymbol{l} = \nu \,\Big|\, \frac{\nu}{q}\underline{\boldsymbol{a}} \tag{37}$$

のようにわけられたとする．ただし $\underline{\boldsymbol{a}}$ は $\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}$ の中にある長さ 1 のベクトルとする．さらに

$$\boldsymbol{x} = \Delta t \mid \underline{\boldsymbol{x}}$$

とおけば，位相差は

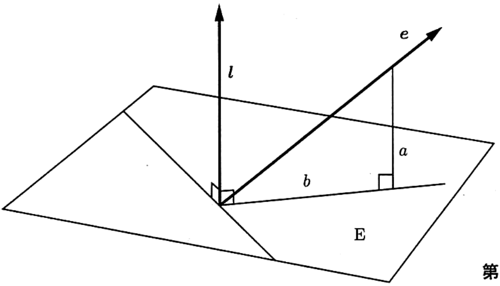
$$\Theta(\mathrm{B}) - \Theta(\mathrm{A}) = \nu\left\{\frac{(\underline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{x}})}{q} - \Delta t\right\}$$

となる．この式から，ν は振動数，また $\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{e}}$ の中における光の伝播速度が q，$\underline{\boldsymbol{a}}$ は，その方向を示すことがわかる．また q は位相面 E に対する $\boldsymbol{e}$ の勾配をあたえる．ここで勾配とは第 15 図の $\dfrac{a}{b}$ のことである．ここで $a \perp \mathrm{E}$，b は E の面内にある．エーテル内では（つまり真空中では）マックスウェルの方程式からも与えられるように，伝播速度 $q=1$ である．したがって

$$(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}) = 0.$$

さて世界を $\boldsymbol{e}$，および $\boldsymbol{e}'$ に対して時・空分割を行なったとする．この場合，$\boldsymbol{e}'$ に対応した分割はすべて $'$ を肩につけて，$\boldsymbol{e}$ に対応した分割と区別することにする．まず $(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l})$ の不変性から

12）　訳者注：$\boldsymbol{l}$ はいわゆる 4 次元波数ベクトルにほかならない．



第15図

$$\nu^2\left(\frac{1}{q^2}-1\right)=(\nu')^2\left\{\frac{1}{(q')^2}-1\right\}. \qquad (38)$$

つぎに二つの光線 $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ を考える．これらの振動数を ν_1, ν_2, また伝播速度を q_1, q_2 とすれば

$$(\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2)=\nu_1\nu_2\left\{\frac{(\underline{\boldsymbol{a}}_1\cdot\underline{\boldsymbol{a}}_2)}{q_1q_2}-1\right\}.$$

これらの伝播方向の間の角を ω とすれば，$\mathrm{R}_e, \mathrm{R}_{e'}$ を基準にした場合；

$$\nu_1\nu_2\left\{\frac{\cos\omega}{q_1q_2}-1\right\}=\nu_1'\nu_2'\left\{\frac{\cos\omega'}{q_1'q_2'}-1\right\} \qquad (39)$$

が成立する．エーテル中の光の場合には，

$$q=q'=1, \qquad \nu_1\nu_2\sin^2\frac{\omega}{2}=\nu_1'\nu_2'\sin^2\frac{\omega'}{2} \qquad (40)$$

となる．最後に，ν と ν' の間の関係を導くために，$\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ のなかに静止している物体を考えよう．これは $\underline{\mathrm{R}}_e$ から見たとき，一定の速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ をもって走っているとする．したがっ

て e' を前のように

$$e' = h \,|\, h\underline{v} \quad (\underline{v}\text{ は }\underline{\mathrm{R}}_e\text{ の中のベクトル}) \qquad (31)$$

とおく．(31)，(37) から

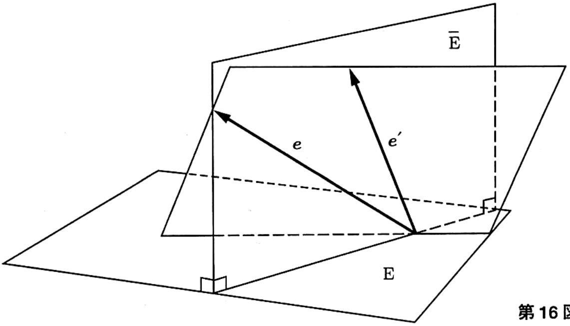
$$\nu' = -(l\cdot e') = \nu h\left\{1 - \frac{(\underline{a}\cdot\underline{v})}{q}\right\}.$$

いま $\underline{\mathrm{R}}_e$ において光線の方向 $\underline{a}$ と，物体の速度 $\underline{v}$ の方向の間の角を ϑ とすれば

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left\{1 - \frac{v\cos\vartheta}{q}\right\}. \qquad (41)$$

(41) は**ドップラーの法則**を示す．いま例として容認された基準空間の中に静止している 1 個のナトリウム分子を考えてみよう．これは客観的に常に同じ構造をもち，またどの分子も等しい構造を持っていると考えられる．そこで $\underline{\mathrm{R}}_e$ に静止している分光器を使って，$\underline{\mathrm{R}}_e$ に静止しているナトリウム分子から放射された光を測定して得た振動数を ν'，また同じ分光器を使って，分光器に対して速度 v で走っている分子からの光を測定して得た振動数を ν とする．分子の運動方向と，分光器に入射する光線の方向の間の角を ϑ とすれば，ν と ν' の間には (41) が成立する．なんとなれば，第二の分子と一緒に動いている基準空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ は，基準にとった静止空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ に対して相対速度 $\underline{v}$ で走っている．したがって第二の分子自身の出す光を $\underline{\mathrm{R}}_e$ で測定したときの振動数は ν，またそれを分子とともに運動している空間 $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ で測定したものは，さきに述べた注意により，当然 ν' に等しい．そこで (41) を (38) に代入すれば，q と q' の

間の関係が求められる．それは静止している媒質，たとえば水（これは $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ の中に静止しているとする）の中を伝播する光の速度 q' から，速さ v で走っている媒質（$\underline{\mathrm{R}}_e$ から上述の媒質を眺めたとき，それは速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ で走っている）中の光の伝播速度 q を導き出すのに役立つ公式である．ここで ϑ は水（媒質）の流れの方向と，分光器（R_e に静止している）に入射する光線の方向との間の角を示す．この関係式は幾何学的にいうならば，ひとつの位相面 E およびその上の 1 点から突き出た二つの方向 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{e}'$（第 16 図）の間の関係を表わすものといえる．いま $\boldsymbol{e}$ を含み平面 E に垂直な平面を $\overline{\mathrm{E}}$ とする．つまり $\overline{\mathrm{E}}$ と E の交線は，$\boldsymbol{e}$ の E 上への正射影である．いま平面 $[\boldsymbol{ee}']$ と平面 $\overline{\mathrm{E}}$ の間の角を ϑ，$\boldsymbol{e}'$ の $\boldsymbol{e}$ に対する勾配を v とする．そこで $\boldsymbol{e}'$ の平面 E に対する勾配 q' がわかっているとき，$\boldsymbol{e}$ の E に対する勾配 q を与える公式が (38)［これに (41) を代入したもの］であ



第 16 図

る．したがってこの問題は速度の合成の問題とは異質のものである．ただ e，e' がどちらも E に垂直な平面 $\overline{\mathrm{E}}$ の中に含まれているときは，同じ方向の速度の合成の際と同じ図を問題にすることになる．すなわち，その時は，——普通よく知られているものと同じように，われわれの計算からも——

$$q=\frac{q'+v}{1+q'v}$$

がなりたつ．あるいは v の高次の項を無視（実際の問題では v は光速度にくらべて非常に小さい）すれば

$$q=q'+v(1-q'^2).$$

そこで媒質の屈折率 $n=\dfrac{1}{q'}$ を使うと，$\underline{\mathrm{R}}_e$ からみた速さ q は $q'+v$ ではなくて，v の一部分，すなわち $v\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ を q' に加えたものが q の値となる．〔訳者注：媒質自身は空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ に対して速さ v で流れていても，昔のエーテル説に従えばエーテルは必ずしも媒質に完全にくっついて流れるとはかぎらない．むしろエーテルは媒質より幾分おくれて，媒質に引きずられながら流れると考えられる．したがってその速さは v より小さく $v\cdot k$ $(k<1)$ である．相対性理論からの結論ではこの $k=1-\dfrac{1}{n^2}$，これはエーテルの媒質に対する随伴係数といわれる〕．**“随伴係数”**（Mitführungskoeffizient）$1-\dfrac{1}{n^2}$ は相対性理論よりずっと以前に，フィゾーによって実験的にたしかめられた．彼の実験の本質は，同じ光源から出た光線を二つにわけ，一方は静止した水中を，

他は流水の中を通過させ，これらを干渉させるという方法である [11]．相対性理論がこの注目すべき実験結果を説明することができたという事実は，この理論が，運動している媒質中における光学的電気力学的現象に対しても正しいものであることを示すものといえよう（また，媒質中でなりたつ波動方程式からの誤まった想像をもとにして，たとえば，ローレンツ - アインシュタインの相対性理論にでてくる c を q でおきかえれば，媒質中でも相対性原理がなりたつと考えがちだが，実はこれは間違っているということも，上の事実から示される）．最後に，エーテルの場合（つまり真空の場合）には $q=q'=1$ となるから (39) は [(40) を参照]：

$$\sin^2\frac{\omega}{2}=\frac{(1-v\cos\vartheta_l)\cdot(1-v\cos\vartheta_2)}{1-v^2}\sin^2\frac{\omega'}{2}$$

となる．いま太陽系の重心が静止している基準空間を $\underline{\mathrm{R}}_e$ とする．つまりこの空間を基準にとれば，惑星の力学法則は簡単な形に表現されることになる．また観測器具が固定されている地球を物体 K′ と考え，これは $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中を一様な速さ v で運動しているとする（地球は基準空間 $\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ の中に静止している）．また無限の遠方にある二つの恒星から太陽系に入射する 2 本の光線の間の角（$\underline{\mathrm{R}}_e$ からみた角）を ω，これらの光線が地球の運動方向となす角を ϑ_1，ϑ_2（$\underline{\mathrm{R}}_e$ からみた角）とする．上述の二つの星を地球から眺めたとき，これらの星の間の角（$\underline{\mathrm{R}}_{e'}$ からみた視角）を ω' とするとき，ω' を他の量から決定する公式が上に与えた関係式で

ある．われわれは ω を直接，測定することはもちろんできない．しかし ϑ_1，ϑ_2 は一年のあいだに変化する．この変化と結びついた ω' の変化（光行差）をわれわれが観測することはできる．

上に求めた時間と固有時間のあいだの関係や，運動する物体の体積と，その静止しているときの体積のあいだの関係は，一様な運動でない場合にもなりたつ．いま運動している質点が，世界のなかで，無限小時間のあいだに，無限小変位 $d\boldsymbol{x}$ を行なったとすれば，

$$d\boldsymbol{x} = ds\cdot\boldsymbol{u}, \quad (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = -1, \qquad ds > 0$$

によって，固有時間 ds と，変位 $d\boldsymbol{x}$ の 4 次元世界のなかにおける方向 $\boldsymbol{u}$ が定義される．そこで質点の描く世界線の任意の一部分にわたってつぎの積分

$$\int ds = \int\sqrt{-(d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x})}$$

を計算すれば，この値は世界線のこの部分を質点が通過するあいだに，経過した“固有時間”である．この固有時間は世界の時間・空間への分割の仕方には無関係である．またこれは，質点の加速度があまり大きくない場合には，質点に固定した時計の示す時間に等しい．いま世界の中に任意の直線座標系 (x^i) を設け，質点の世界線を解析的に表示するために，固有時間 s をパラメーターとして用いるならば（ちょうど 3 次元幾何学で曲線を表示するのに，曲線の弧の長さを使うのと同様である），

$$\frac{dx^i}{ds} = u^i$$

となる．これは $\boldsymbol{u}$ の反変成分である．また $\sum_{i=0}^{3} u_i u^i = -1$ である．ここで世界を $\boldsymbol{e}$ によって時・空分割すれば

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \Bigg| \frac{\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}} \quad (\underline{\mathrm{R}}_e\text{のベクトル})$$

となる．$\underline{\boldsymbol{v}}$ は $\underline{\mathrm{R}}_e$ を基準空間としたときの，質点の速度である．4 次元変位 $d\boldsymbol{x}$ のあいだに経過した $\underline{\mathrm{R}}_e$ における時間 dt と，固有時間 ds の間には，$d\boldsymbol{x}$ を時・空分割したものと $\boldsymbol{u}ds$ をくらべることにより，つぎの関係式がなりたつことがわかる．

$$ds = dt\sqrt{1-v^2}. \tag{42}$$

いま二つの世界点 A，B は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が未来を向く時間的ベクトルであるように，並んでいるとする．この場合には A と B を 1 本の曲線で結び，しかもこの曲線上のどの点でも，曲線の方向が時間的であるようにすることが可能である．つまり $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が未来向きの時間的ベクトルの場合には A を出発した質点を B に到達させることが必ず可能である．質点が A から B に到達するのに必要な固有時間の大きさは途中通る経路に依存する（このために，ひとつの場所から他のすべての場所まで時計を運搬することによって出発点の時刻を他の場所まで，途中の経路に無関係に伝えようとしても，それは不可能となる）：もし質点が等速直線運動によって A から B に行く場合はその間に要した固有時間は，他の経

路の場合にくらべて最も長い．なんとなれば，時間軸の向き $\boldsymbol{e}$ を特別にえらんで，世界を時・空分割したとき，A, B が $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中の同じ点にあるようにする．つまりこの空間を基準にとればAからBまで等速直線運動をする質点はAに静止していることになる．ところで（42）によれば，固有時間 s は常に時間 t よりおくれる．しかしここで扱っている問題では $v=0$ だからこの遅れがなくなり，固有時間の経過は最大となる．——人間の生命過程は時計とよく似ている．いま双生児が世界点Aに誕生したとする．そのうちの1人はその生まれ故郷（つまりひとつの適当な基準空間に終始静止しているとする）に留まっているとする．他方，もう1人の方は，ほとんど光の速さに近い高速度で旅行にでかけたとする（ただし故郷に対する相対速度を意味する）．この旅行者が他日，再び故郷に帰ってきたとき，彼は，故郷に留まっていた者よりずっと若く見えるであろう．

連続的に拡がっている物体の微小部分の質量を dm とし，これは大きさが v の速度で運動しているものとする．ある瞬間のその体積を dV，またその静止の時の体積を dV_0 とすれば，

$$dV = dV_0\sqrt{1-v^2}$$

がなりたつ．そこで質量密度 $\mu = dm/dV$ と，静止密度 $\mu_0 = dm/dV_0$ の間には

$$\mu_0 = \mu\sqrt{1-v^2}.$$

ここで μ_0 はその定義から不変量であるから，$\mu_0 u^i$ を成分とする $\mu_0 \boldsymbol{u}$ はひとつの反変ベクトルである．これは質量の

運動だけできまる量で，座標系のとりかたには無関係な量であり，“質量の流れ”を表わすベクトルである．これは連続の方程式

$$\sum_i \frac{\partial(\mu_0 u^i)}{\partial x^i} = 0$$

を満足する．これと同じことは電荷にもなりたつ：いま電荷が物質に密着しているとする．物質の微小部分（その質量を dm）の持つ電荷を de とすれば電荷の静止密度 $\rho_0 = de/dV_0$ と運動しているときの電荷密度 $\rho = de/dV$ の間には

$$\rho_0 = \rho\sqrt{1-v^2}$$

という関係がなりたち，また

$$s^i = \rho_0 u^i$$

は“4 次元電流”の反変成分を示す．これは§21 に述べたことにまさに対応している．電気に対するマックスウェルの現象論的理論では，電子の隠れた運動を，電荷を荷なった物質の運動として考慮に入れるということがされなかった．その結果，マックスウェルの理論では，電荷は物質に密着しているものとしては扱われなかった．その考えによればある物質の小片に現われる電荷とは，その瞬間にこの物質の小片によって占められている空間の部分に物質と同時に（しかし物質に密着しているとは考えない）たまたまそこに存在する電荷のことである．それゆえこの考えに従えば，電荷は，電子論に由来するような，物質片によりきまるひとつの不変量とはならない．むしろそれは時・空の

分割法に依存して変化することになる．

§ 25　運動している物体の電気力学

世界を空間と時空に分割すれば，これにともなってすべてのテンソルも分割されることになる．運動している物体に対する電気力学の基礎方程式を導くのに，テンソルの時・空分割はきわめて便利な手段である．そこでまず純粋に数学的にテンソルの時・空分割がどのように遂行されるかを考えてみよう．われわれは一般的に n 次元距離空間を扱うことにし，これを“世界”とよぶことにする．この距離の基本形式は $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})$ で与えられるものとする．$\boldsymbol{e}$ を“世界”のなかのひとつのベクトルとして $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=e\neq 0$ とする．この方向に“世界”を時・空分割し，“空間”を $\underline{\mathrm{R}}_e$ とする．$\underline{\boldsymbol{e}}_1$, $\underline{\boldsymbol{e}}_2$, …, $\underline{\boldsymbol{e}}_{n-1}$ は $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中に設けられたひとつの座標系とする．また“世界”ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ は $\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{e}$ に直交する n 次元変位ベクトルで，これらの“空間”部分が上に述べた $\underline{\boldsymbol{e}}_1$, $\underline{\boldsymbol{e}}_2$, …, $\underline{\boldsymbol{e}}_{n-1}$ であるとする．$\underline{\mathrm{R}}_e$ に対応する n 次元“世界”の座標系 $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, …, $\boldsymbol{e}_{n-1}$ は，次の表に示されるような計量基本テンソルの共変成分をもつ：

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, (n=3\text{ の場合}),\ g_{ik}=(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k).$$

さてこれからひとつの例として2階テンソルを考えてみよう．上に述べた座標系を用いたとき，その成分は T_{ik} であ

るとする．この成分は，ベクトル $\boldsymbol{e}$ だけによって一通りにきまった方法で，つぎの表のように分割される：

T_{00}	T_{01}	T_{02}
T_{10}	T_{11}	T_{12}
T_{20}	T_{21}	T_{22}

すなわち 1 個のスカラー T_{00}，2 個のベクトル (T_{01}, T_{02}) および (T_{10}, T_{20})，最後に 1 個の 2 階テンソル T_{ik} $(i, k=1, 2)$ に分割される．これらは座標系 $\underline{e}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ をもつ空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ に所属するスカラー，ベクトル，テンソルである．

いま任意の "世界" ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{e}$ の方向に分割する．

$$\boldsymbol{x} = \xi \mid \underline{\boldsymbol{x}}.$$

また $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{e}$ に平行な部分と，これに垂直な部分 $\boldsymbol{x}^*$ に分けて，

$$\boldsymbol{x} = \xi \boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^*$$

とおき，一方，座標系 $\boldsymbol{e}_i$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$ を基準にしたときの反変成分を ξ^i とすれば，つぎの諸関係式がなりたつ．

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi^i \boldsymbol{e}_i, \quad \xi = \xi^0, \quad \boldsymbol{x}^* = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i \boldsymbol{e}_i, \quad \underline{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i \underline{\boldsymbol{e}}_i.$$

そこで，座標系を用いないでもテンソルの時・空分割をつぎのように表現することができる．いま $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の任意の二つの変位ベクトル（"世界" ベクトル）とする．これらを

$$\boldsymbol{x} = \xi \boldsymbol{e} + \boldsymbol{x}^*, \qquad \boldsymbol{y} = \eta \boldsymbol{e} + \boldsymbol{y}^* \tag{43}$$

とおく．$\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$ はともに $\boldsymbol{e}$ に垂直な“世界”ベクトルである．そこで2階テンソルに関連して作られる $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の双一次形式 $T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は，(43) に従って

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \xi\eta T(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) + \eta T(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}) + \xi T(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}^*) + T(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$$

のようにわけられる．そこで $\boldsymbol{e}$ に垂直な“世界”ベクトル $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$ のかわりに“空間” $\underline{R}_e$ における任意の二つの変位ベクトル $\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}$ を用いて，つぎのような規則にしたがって $\underline{R}_e$ におけるベクトルやテンソルを定義する：

1．スカラー：$\underline{J} = J = T(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$,

2．$\underline{R}_e$ における $\underline{\boldsymbol{x}}$ についての2個の一次形式（ベクトル）：

$$\underline{L}(\underline{\boldsymbol{x}}) = T(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{e}), \qquad \underline{L}'(\underline{\boldsymbol{x}}) = T(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^*),$$

3．$\underline{R}_e$ における $\underline{\boldsymbol{x}}$, $\underline{\boldsymbol{y}}$ についての，ひとつの双一次形式（テンソル）：

$$\underline{T}(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}) = T(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*).$$

（文字の下に＿のついている量が $\underline{R}_e$ のスカラー，ベクトル，テンソルである）．ここで上の定義の右辺はつぎのように理解すべきである．いま $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は，任意の変位ベクトル（“世界”ベクトル）とし，これらは，時・空分割によって“空間” $\underline{R}_e$ のなかの $\underline{\boldsymbol{x}}$, $\underline{\boldsymbol{y}}$ に射影されるものとする．その場合には上の定義の右辺の $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*$ とは $\boldsymbol{x} - \xi\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{y} - \eta\boldsymbol{e}$ を示すものと理解すべきである．つまり $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$ のかわりに $\boldsymbol{x} - \xi\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{y} - \eta\boldsymbol{e}$ を代入するものと理解する．ここで ξ, η とは

$$\xi = \frac{1}{e}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}), \qquad \eta = \frac{1}{e}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{e})$$

のことである．いま

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}) = L(\boldsymbol{x}), \qquad T(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}) = L'(\boldsymbol{x})$$

とおけば，上に述べた定義は結局

$$\left.\begin{aligned} &\underline{L}(\underline{\boldsymbol{x}}) = L(\boldsymbol{x}) - \frac{J}{e}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}),\ \underline{L}'(\underline{\boldsymbol{x}}) = L'(\boldsymbol{x}) - \frac{J}{e}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}), \\ &\underline{T}(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}) = T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \frac{1}{e}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{e})L(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{e}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e})L'(\boldsymbol{y}) \\ &\qquad + \frac{J}{e^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e})(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{e}) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

となる．これらの式の左辺は $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中のベクトルについて定義された一次式あるいは双一次形式（ベクトル，またはテンソル）を示す．これらを，$\underline{\boldsymbol{x}}$, $\underline{\boldsymbol{y}}$ に対応した“世界”ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を用いて，また左辺により一意的にきまる“世界”ベクトルや，“世界”テンソルによって書きあらわしたものが（44）の右辺である．たとえばさきに述べたような座標系を基準にとれば，つぎのような事情になる：たとえば $n=3$ としたとき成分で示すと，

$$\underline{T} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \text{ が } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}$$

により表わされることになる．

一般の計算の場合にも“空間”のテンソルがこれに対応する“世界”のテンソルで表わされることが，容易にわかるであろう．しかしここでは，つぎのことを用いるだけにと

どめる．すなわち“空間”の二つのテンソルの一方が他方の λ 倍に等しいときは，同じことがこれらのそれぞれに対応する“世界”テンソルに対してもなりたつということである．

つぎに任意の座標系を基準として，上述の分割の計算を，考えなおしてみよう．まず，その座標系における $\boldsymbol{e}$ の表現を

$$\boldsymbol{e} = (e^0, e^1, \cdots, e^{n-1})$$

とする．そこで不変量 J, e は

$$J = T_{ik}e^i e^k, \quad e = e_i e^i$$

となる．$\underline{\mathrm{R}}_e$ における二種のベクトルおよびテンソルは，(44) にしたがって，つぎのような成分をもつ二つの“世界”ベクトル，および“世界”テンソルで表わされる：

$$\underline{L} : L_i - \frac{J}{e}e_i, \qquad L_i = T_{ik}e^k,$$

$$\underline{L}' : L'_i - \frac{J}{e}e_i, \qquad L'_i = T_{ki}e^k,$$

$$\underline{T} : T_{ik} - \frac{1}{e}(e_i L'_k + e_k L_i) + \frac{J}{e^2}e_i e_k.$$

もし反対称テンソルのときは $J=0$ となる．また $\underline{L}' = -\underline{L}$．そこで上の式は

$$\underline{L} : L_i = T_{ik}e^k,$$

$$\underline{T} : T_{ik} + \frac{e_i L_k - e_k L_i}{e}.$$

したがって 2 階線形“世界”テンソルは“空間”におけるひとつのベクトルとひとつの 2 階線形“空間”テンソルに

分かれる．

静止している物体に対するマックスウェルの方程式は§21においてすべて与えられている．この方程式を運動している物体に対しても，一般的になりたつように拡張しようとする試みをはじめて行なったのはH. ヘルツである．ファラデーの電磁誘導の法則はつぎのようにいい表わされる：1本の導線によって取り囲まれた曲面内を通過する磁束の時間的減少率は，この導線にそって誘起された起電力に等しい：すなわち

$$-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int B_n d\sigma = \int \underline{\boldsymbol{E}}\cdot d\underline{\boldsymbol{r}}. \tag{45}$$

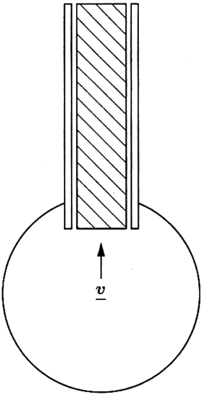
もし導線が運動しているときは，左辺の面積積分は，動く導線によってかこまれた，導線とともに移動する曲面上にわたって計算されねばならない．ところで，このファラデーの電磁誘導の法則は，もともと導線がその位置を変えることにより，導線のとりかこむ曲面内を通る磁束の時間的変化が起こる場合に対して，実験的に証明されたものである．そこでヘルツは，この法則が運動する導線に対しても成立すべきであると要請することは当然であると考えた．また $\mathrm{div}\underline{B}=0$ は運動物体についてもなりたつとしてよかろう．したがってベクトル解析の定理を考慮し，また $\mathrm{div}\underline{B}=0$ を用いれば，(45) はつぎの微分形式に書きあらわされる：

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathrm{rot}\,[\underline{v}\times\underline{B}]. \tag{46}$$

ここで $\dfrac{\partial \underline{\mathrm{B}}}{\partial t}$ は空間的位置を固定したまま，ただ時間につい

ての微分をとることを示す．また $\underline{\boldsymbol{v}}$ は，$\underline{B}$ と同じ場所にある物質の速度を示す．

（46）は注目すべき結果を引きおこす．いま 2 枚の導体の板（コンデンサーの両極板）により一様な誘電体がサンドウィッチ状にはさまれているとする（ウイルソンの実験）．この誘電体は両極板の間を，一様な速さ $\underline{\boldsymbol{v}}$（大きさ v）をもって滑るように運動するものとする．両極板は導線によって結ばれている．さらに一様な磁場 H が，極板には平行に，しかし $\underline{\boldsymbol{v}}$ に垂直に働いているとする．またこの誘電体と極板の間にはごく狭い真空のスキ間が介在しているが，このスキ間の厚みは極限として 0 になると考える．さて，この両極板の間の空間（つまり誘電体の内部）では，（46）からわかるように，$\underline{E}-\dfrac{1}{c}[\underline{\boldsymbol{v}}\times\underline{B}]$ という量がポテンシャ



第 17 図

ルの grad で表わされることになる．この量は導線やそれで結ばれた極板内は 0 であるはずだから，結局誘電体内でも

$$\underline{E} = \frac{1}{c}[\underline{v} \times \underline{B}].$$

つまり両極板間にはこれに垂直な電場が誘起され，その大きさは

$$E = \frac{\mu}{c} vH, \qquad (\mu：\text{誘電体の透磁率}).$$

したがって極板上には静電荷が発生するはずである．その表面密度は

$$D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon\mu}{c} vH, \qquad (\varepsilon：\text{誘電体の誘電率}).$$

いまこの誘電体がガスであるとすれば，ガスの濃度がどんなに希薄でもこの電荷は消滅しないはずである．なぜならば，ガスを極端に希薄にしても $\varepsilon\mu$ は 0 にはならず，その極限値は 1 であるから．もしわれわれがエーテル説を信ずるならば，この不合理な結果にもひとつの説明を与えることができる．エーテル説に従うならば，両極板間にあるエーテルは，極板に対して運動をし，極板より外側に在るエーテルは静止しているとき，上述の現象が起こる．しかし電磁誘導の説明には，導体の運動に際して，エーテル自身も導体と一緒に運動することをわれわれは仮定しなければならない[13]．しかし流水中の光の伝播についてのフィゾーの実験や，ウイルソン自身の実験 [12] によれば，この仮定が正しくないことがわかる．フィゾーの実験で，エーテル

の随伴係数が $1-\dfrac{1}{n^2}$ となることがわかったから，これを用いると，今，問題にしている電荷として

$$\frac{\varepsilon\mu-1}{c}vH$$

の量が観測されることになる．これは希薄ガスの場合に，すなわち $\varepsilon\mu=1$ の極限では 0 となるから具合がよい．しかしこの考えは運動している導体による電磁誘導の事実と矛盾しており，それの解決は到底できそうには思えない．

これに対して相対性理論はわれわれに完全な解答を与えてくれた．まず§21 のように $ct=x^0$ とおく．また $\underline{E}, \underline{B}$ を 2 階反対称テンソル場 $\boldsymbol{F}$ で表わしたように，$\underline{D}, \underline{H}$ も一緒にしてひとつの 2 階反対称テンソル H で表わすと，場の方程式は

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}=0 \\ \sum_k \frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k}=s^i \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

となる．いま F_{ik} は 2 階反対称テンソルの共変成分，また H^{ik} も他の 2 階反対称テンソルの反変成分，さらに s^i は 4 次元世界のひとつのベクトルの反変成分とすれば，これらの量の任意の一次変換に対する不変性から，(47) は座標

13) このときは，(46) の $\underline{v}$ は物体の速度ではなく，エーテル自身の速度である．しかしそれなら，エーテルの何に対する速さか？という疑問があらたに生ずる．

系の任意の一次変換に対して，不変である．これに対して，物質の性質に関係する法則

$$\underline{D}=\varepsilon\underline{E},\quad \underline{B}=\mu\underline{H},\quad \underline{s}=\sigma\underline{E}$$

のテンソル形式への書きかえには特別な注意が必要である．

いま世界を空間と時間に分割し，物質はこの空間の中に静止しているとする．さらに F を $\underline{E}\mid\underline{B}$ に，また H を $\underline{D}\mid\underline{H}$，$s$ を $\rho\mid\underline{s}$ に分ける．このように分割すれば，上の関係式はなりたつ．いま任意の座標系を用い，この座標系を基準にしたとき物質の世界線の方向を示すベクトルを u^i とすれば，上の関係式は

$$H_i^*=\varepsilon F_i^*. \qquad (48,\ \varepsilon)$$

ここで　$F_i^*=F_{ik}u^k,\qquad H_i^*=H_{ik}u^k$

である．また

$$F_{ik}-(u_iF_k^*-u_kF_i^*)=\mu\{H_{ik}-(u_iH_k^*-u_kH_i^*)\} \qquad (48',\ \mu)$$

および

$$s_i+u_i(s_ku^k)=\sigma F_i^*. \qquad (48,\ \sigma)$$

これがさきに3次元ベクトル記号で示した関係を不変なテンソル形式に書きなおしたものである．実際の計算には，(48′, μ) を，それから導かれるつぎの関係式

$$F_{kl}u_i+F_{li}u_k+F_{ik}u_l=\mu\{H_{kl}u_i+H_{li}u_k+H_{ik}u_l\} \qquad (48,\ \mu)$$

でおきかえる方が好都合であろう．これらの関係式はその導きかたからも判るように，一様な並進運動をしている物

質に対してだけなりたつ．しかしわれわれはこれがつぎのような場合にもなりたつと考えるべきである．すなわち物質全体は多数の個々の小部分にわかれており，これらの小部分の間は真空である．個々の小部分はそれぞれ異なったしかし一様な速度で運動しているような場合である[14]．さらにまた一様でない場合でも，時間的にも空間的にも物体の速度があまり急速に変化しないならば，任意の運動をしている物体に対しても，上の関係式はすべてなりたつものと要求する．

上述のような不変な関係式を導いた以上，任意の時間的ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対応して世界の時・空分割が可能となる．測定器は空間 $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中に静止しているとする．この測定器により場から物体への作用が測定される．いま $\underline{\mathrm{R}}_e$ に属する座標系を用いてつぎのようにおく：

---

14)　これはたいていの応用問題における重要な点である．いまある物体 K が静止してみえる基準座標系を考える．この系を基準にとり，物体 K とそれをとりかこむ真空部分に対して，静止物体に対するマックスウェルの法則を適用する．互いに相対的に運動している種々の物体の体系の場合には，個々の物体ごとにそれが静止してみえるような座標系を設け，それを基準にしてマックスウェルの法則を適用する．このようにして各物体ごとにそれぞれ導かれる結論には，各物体をとりかこむ真空部分に対する結論が含まれている．それらは同じ（共通の）真空をそれぞれ異なる基準座標系からながめた場合の結論である．したがってそれらの間には当然矛盾はない．なんとなれば，真空に対しては相対性原理がなりたつから．

$$(F_{10},\ F_{20},\ F_{30}) = (\underline{E}_1,\ \underline{E}_2,\ \underline{E}_3) = \underline{\boldsymbol{E}}$$
$$(F_{23},\ F_{31},\ F_{12}) = (\underline{B}_{23},\ \underline{B}_{31},\ \underline{B}_{12}) = \underline{\boldsymbol{B}}$$

$$(H_{10}, H_{20}, H_{30}) = (\underline{D}_1,\ \underline{D}_2,\ \underline{D}_3) = \underline{\boldsymbol{D}}$$
$$(H_{23}, H_{31}, H_{12}) = (\underline{H}_{23}, \underline{H}_{31}, \underline{H}_{12}) = \underline{\boldsymbol{H}}$$

$$s^0 = \rho\,; \qquad (s^1,\ s^2,\ s^3) = (\underline{s}^1,\ \underline{s}^2,\ \underline{s}^3) = \underline{\boldsymbol{s}}$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,;\ \ (u^1,\ u^2,\ u^3) = \frac{(\underline{v}^1,\ \underline{v}^2,\ \underline{v}^3)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

このようにおけば，再びマックスウェルの方程式が $\underline{\mathrm{R}}_e$ の中のベクトル $\underline{E}$，$\underline{B}$ 等々についてなりたつ．しかもこれは静止している物体に対してばかりでなく，運動している物体に対しても同じ形の式がなりたつ．さきにも述べた電磁誘導の観測結果に対しては，(46) のような付加項が必要のように思われる．そのこととここに述べた結論とは著しく矛盾しているように思われる．しかし実際はそのような矛盾はない．なんとなれば電磁誘導の実験では電場の強さ $\underline{E}$ ではなく導線内を流れる電流が現実には観測されたのである．ところで $\underline{E}$ と，電流の結びつきは，導線が運動しているときは，静止の場合と異なり，(48, σ) で与えられる．

いま (48, ε)，(48, σ) について $i=1,2,3$ の成分を，また (48, μ) については

$$(ikl) = (230), (310), (120)$$

の成分をかけば（他は余計である)，容易にわかるように，以下のようになる．

いま

$$\underline{\boldsymbol{E}}+[\underline{\boldsymbol{v}}\times\underline{\boldsymbol{B}}]=\underline{\boldsymbol{E}}^*,\qquad \underline{\boldsymbol{D}}+[\underline{\boldsymbol{v}}\times\underline{\boldsymbol{H}}]=\underline{\boldsymbol{D}}^*$$

$$\underline{\boldsymbol{B}}-[\underline{\boldsymbol{v}}\times\underline{\boldsymbol{E}}]=\underline{\boldsymbol{B}}^*,\qquad \underline{\boldsymbol{H}}-[\underline{\boldsymbol{v}}\times\underline{\boldsymbol{D}}]=\underline{\boldsymbol{H}}^*$$

とおけば，（48，ε），（48，μ）は

$$\underline{\boldsymbol{D}}^*=\varepsilon\underline{\boldsymbol{E}}^*,\qquad \underline{\boldsymbol{B}}^*=\mu\underline{\boldsymbol{H}}^*$$

となる．ところで $\underline{\boldsymbol{s}}$ を“運搬電流”（Konvektionsstrom）$\underline{\boldsymbol{c}}$ と“伝導電流”（Leitungsstrom）$\underline{\boldsymbol{s}}^*$ にわけて

$$\underline{\boldsymbol{s}}=\underline{\boldsymbol{c}}+\underline{\boldsymbol{s}}^*$$

$$\underline{\boldsymbol{c}}=\rho^*\underline{\boldsymbol{v}},\quad \rho^*=\frac{\rho-(\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\underline{\boldsymbol{s}})}{1-v^2}=\rho-(\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\underline{\boldsymbol{s}}^*)$$

とおけば（48，σ）は

$$\underline{\boldsymbol{s}}^*=\frac{\sigma\underline{\boldsymbol{E}}^*}{\sqrt{1-v^2}}$$

となる．これですべてのことは明らかになった．すなわち電流の一部分は運搬電流で，これは荷電物体が運動することに起因している．これに対して残りの部分は伝導電流で，これは物質の電気伝導度によってきまるものである．伝導電流はオームの法則によって計算される．ただし，起電力としては $\underline{\boldsymbol{E}}$ ではなく $\underline{\boldsymbol{E}}^*$ を閉じた導線にそって線積分することにより与えられる．マックスウェルの方程式の $\underline{\boldsymbol{E}}$ を $\underline{\boldsymbol{E}}^*$ で書きあらわせば（46）と同じ形の方程式がなりたつ：

$$\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{E}}^*=-\frac{\partial\underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}+\mathrm{rot}[\underline{\boldsymbol{v}}\times\underline{\boldsymbol{B}}]$$

（c はここでは 1 とおいた）．あるいは（45）のような積分形式で書けば

$$-\frac{d}{dt}\int \underline{B}_n d\sigma = \int \underline{\boldsymbol{E}}^* \cdot d\underline{\boldsymbol{r}}.$$

これによって運動している導体の場合のファラデーの電磁誘導の法則は完全に説明された．一方，ウイルソンの実験に対しては，いまのわれわれの理論では rot $\underline{\boldsymbol{E}}=0$ がなりたつ．したがって導線で結合された両極板の間には電位差はないから，この間の部分で $\underline{\boldsymbol{E}}=0$．この結果から，極板に垂直な電気的ベクトル $\underline{\boldsymbol{E}}^*$，および極板には平行で，媒質の運動方向に垂直な磁束 $\underline{\boldsymbol{B}}^*$ $(=\underline{\boldsymbol{B}})$ の大きさは

$$E^* = vB^* = v\mu H^* = \mu v(H+vD),$$

$$D = D^* - vH = \varepsilon E^* - vH.$$

上の式を下の式の右辺に代入すれば

$$D = v\{(\varepsilon\mu-1)H + \varepsilon\mu v D\},$$

あるいは

$$D = \frac{\varepsilon\mu-1}{1-\varepsilon\mu v^2} vH.$$

これは極板の表面にあらわれる電荷密度の大きさである．v^2 が光の速さ 1 に比べて非常に小さいことを考えるならば，この結果が観測事実と一致していることがわかろう．

物質が真空（エーテル）と接する境界面についての境界条件は，われわれが物体と一緒に運動しているかぎり，場の量 F や H が不連続的な変動をしないということから，きめられる．しかしもし空間の中の 1 点，特に真空中の 1 点に固定して，そこにおける場の変化を眺めるときは，物

体がちょうど，この点を通過する瞬間には，場の量は一般には不連続的な変化をする．いま物体のある小部分の固有時間を s とおけば，この小部分の占める場所（および時刻）における場の量は，小部分の移動とともにつぎのように変化する：

$$\frac{dF_{ik}}{ds}=\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}u^l.$$

これは上に述べたことから，この小部分のえがく世界線上のいたるところで有限な値をとる．いま

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}=-\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}$$

のようにかきかえると

$$\frac{dF_{ik}}{ds}=\frac{\partial F_i{}^*}{\partial x^k}-\frac{\partial F_k{}^*}{\partial x^i}.$$

またはベクトル記号でかくと

$$\frac{d\underline{\boldsymbol{B}}}{ds}=-\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{E}}^*.$$

左辺が常に有限であるから，$\underline{\boldsymbol{E}}^*$ の表面回転（Flächenwirbel）および $\underline{\boldsymbol{B}}$ の表面発散（Flächendivergenz）は 0 となる[15]．

運動している物体に対する電気力学の基礎方程式は，相対性原理が発見される以前に，既にローレンツによって，

15）訳者注：$\dfrac{d\underline{\boldsymbol{B}}}{ds}$ が有限ということから，物質の表面の接線方向に対する $\underline{\boldsymbol{E}}^*$ の成分および $\underline{\boldsymbol{B}}$ の法線成分が物質の内外で連続となるという意味である．

上に述べた形と本質的には同じ形式で，電子論の立場を基にして導かれている．しかしそのことは驚くにはあたらない．なんとなれば真空内におけるマックスウェルの方程式は相対性原理を満足し，また電子論は真空の場合の法則から，多数の電子に対する平均値をとることによって，物質（媒質）が存在するときにもなりたつ法則を導きだしたという事情を考えれば，当然のことであろう．フィゾーや，ウイルソンの実験，さらにもうひとつこれらと類似のレントゲン－アイヘンヴァルトの実験 [13] によれば，物質の電磁的ふるまいに対して相対性原理がなりたつことがわかる．運動している物体の電気力学の問題はアインシュタインが相対性理論を組みたてるきっかけとなったものである．また運動物体に対する電気力学の基礎方程式は，静止物体に対するマックスウェルの方程式を基礎とするとき，これに相対性原理を適用することにより，一意的に決定されることを見とおしよく示してくれたのはミンコウスキーである．この問題に対する最終的な公式化はミンコウスキーによってなされた [14]．

さてここで最後に残ったのは力学である．これはそのもとの形式のままではアインシュタインの相対性原理を満たさない．そこで，相対性原理を満足するように従来の力学を修正するとき，その修正が実験と矛盾しないようにさせるにはどうすればよいかが，これから考究すべき問題である．

§ 26 力学の基本法則．ハミルトンの原理

電磁場の力学的作用における重要な量として，電子論では世界ベクトル $\boldsymbol{p}$ がある．その成分は

$$p_i = F_{ik}s^k = \rho_0 F_{ik}u^k$$

である．これは

$$p_i u^i = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}) = 0 \tag{49}$$

を満足する．ここで $\boldsymbol{u}$ は物体の運動方向を示す 4 次元ベクトルである．いまこれらをつぎのように時・空分割する：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= h \mid h\underline{\boldsymbol{v}} \\ \boldsymbol{p} &= \lambda \mid \underline{\boldsymbol{p}} \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

$\underline{\boldsymbol{p}}$ は空間内における力の密度で（49）により

$$h\{\lambda - (\underline{\boldsymbol{p}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}})\} = 0$$

を満足する．したがって λ は仕事の密度である．

前節にて，運動している物体に対する電磁場の基礎方程式を導いたのと同じ方法で，アインシュタインの相対性原理に従う力学の基本方程式を導くことができる．まずある基準空間からみると，ある物体が静止しているとする．この基準空間ではニュートンの法則がその物体に対してなりたつものと仮定する．さてあるひとつの物体 m がひとつのきまった世界点 O にあるとする．そこでこの物体の運動方向に応じて世界の時・空分割を試みる．この場合には，m は空間 $\underline{\mathrm{R}}_u$ に瞬間的に静止している．$\underline{\mathrm{R}}_u$ を基準にしたとき，この物体の世界点 O における密度を μ_0 とする．無限小の時間 ds が経過したのちに，m の運動方向は $\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$ に

なったとする．$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})=-1$，$(\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u})=-1$ から

$$(\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{u})=0$$

である．そこで $\boldsymbol{u}$ に対応した分割では

$$\boldsymbol{u}=1\,|\,\underline{\boldsymbol{0}},\quad d\boldsymbol{u}=0\,|\,d\underline{\boldsymbol{v}},\quad \boldsymbol{p}=0\,|\,\underline{\boldsymbol{p}}.$$

したがって

$$\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}=1\,|\,d\underline{\boldsymbol{v}}.$$

この分割から，$d\underline{\boldsymbol{v}}$ は時間 ds のあいだに m が獲得した相対速度であることがわかる．そこでニュートンの法則を認める以上当然つぎのような力学の基本法則がなりたつであろう：

$$\mu_0\frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{ds}=\underline{\boldsymbol{p}}.$$

そこで，時・空への分割のしかたに無関係な，つまり不変な形式で表現された法則は

$$\mu_0\frac{d\boldsymbol{u}}{ds}=\boldsymbol{p} \tag{51}$$

であることがわかる．ここで μ_0 は静止系〔ある座標系からながめたとき，ある物体が瞬間的に静止してみえる場合，この座標系をその物体の静止系と呼ぶことにする：訳者〕で測定した物質の質量密度である．また物体の小部分が無限小変位を行ない，その運動方向ベクトルが $d\boldsymbol{u}$ だけ増加するあいだに経過したこの小部分の**固有時間**が ds である．

$\boldsymbol{u}$ に応じた時・空分割は，物体の小部分の運動とともに次第に変化する．そこでこれから $\boldsymbol{u}$ のかわりにあるきまった，未来を指す時間的ベクトル $\boldsymbol{e}$ の方向に応じた時・空

分割を考える．ただし $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=-1$ とする．この場合には (51) は，(50) によってつぎのようになる：

$$\left.\begin{aligned}\mu_0\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)&=\lambda\\ \mu_0\frac{d}{ds}\left(\frac{\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}\right)&=\underline{\boldsymbol{p}}\end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

いまこの分割で t は時間を，dV は体積を示すものとする．またあるきまった瞬間，物体の小部分が静止しているとき，つまりその静止系からみた小部分の体積を dV_0 とすると，$m=\mu_0 dV_0$ はこの質量となる．さらに

$$\underline{\boldsymbol{p}}dV=\underline{\boldsymbol{P}},\ \lambda dV=\Lambda$$

とおけば，$\underline{\boldsymbol{P}}$ はこの小部分に作用している力を示し，Λ はそれのなす仕事となる．そこで (52) に dV をかけ，

$$\mu_0 dV\frac{d}{ds}=m\sqrt{1-v^2}\frac{d}{ds}=m\frac{d}{dt}$$

に注意すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\Lambda \tag{53_0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\underline{\boldsymbol{P}} \tag{53}$$

となる．ただし m は運動のあいだ，変化しないものと仮定した．これは質点に対する力学の方程式である．運動量の方程式 (53) はニュートンのそれに比べて，ただつぎの点がちがっている：

$$\text{運動量は}\, m\underline{v}\, \text{ではなくて，} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

である．エネルギーの方程式（53_0）は一見，奇妙に見える．しかしこれを v の冪（べき）級数に展開すると

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{mv^2}{2} + \cdots,$$

となる．v の高次の項を無視し，さらに v に無関係な第 1 項を除けば，運動エネルギーに対する古典的な表式 $\frac{1}{2}mv^2$ に一致する．

上述の結果からわかるように，またわれわれがかねがね予想していたように，ニュートンの力学からのズレは，光の速さを 1 としたとき質点の速さの 2 乗の程度の量である．それゆえ普通，われわれが力学において扱うような小さい速さの場合には，ニュートンとアインシュタインの力学の差を実験的にたしかめようとしても，それは観測されない．ただ質点の速さが光のそれに近づいたときはじめて，この差違は目だったものとなる．しかしそのような高速の場合には，質点を加速する力に対する物質の慣性抵抗が増加し，その結果，質点の速度は決して光の速さに到達できない．陰極線とか放射性物質から出る β 線中にある負電荷をもった自由に走る電子は，ほとんど光の速さに近いスピードで走っている粒子であると教えられている．実際これらの高速粒子については，カウフマン，ブッヘラー，ラトノウスキー，フプカたちによる実験により，電場による電子の速度方向の加速，磁場による速度に垂直な方向の加速につい

て，相対性理論の主張の正しいことが実証された．さらに原子内の周遊電子に関して，原子から放出される光のスペクトルの微細構造から，新たに，相対性理論に対する実証が得られた [15].

電子論の基本方程式については，§21 において，相対性原理を満足するような不変な形式に，それらの方程式を書き表わすことを試みた．これらの基本方程式に，さらに，電荷が物質に密着していることを表現する方程式 $s^i = \rho_0 u^i$，および上に導いた力学の基本方程式を付け加えてはじめて，閉じた法則の体系をわれわれは創りあげたことになる．この体系には自然現象の経過について，また慣用的表現方法には無関係な，真の法則が含まれている[16)]．このようにしてはじめて，われわれは，自然現象のある領域，つまり電磁現象に対して，相対性原理が成立することを証明したと主張できることになる．

さて，種々の量の物理的定義から，特に場の強さの定義から，それらの量を 4 次元ベクトルやテンソルで表現するには，それらをどのようにまとめねばならないかが，自然にきまる．§21 でまず用いられた発見的な方法は，任意性

16）訳者注：たとえばニュートンの力学では質量と加速度の積として定義された力が法則のなかに登場する．しかし，力についてそれ以上は何もわからない．これに対して，本文の場合には，このような単なる表現として与えられた力ではなく，電磁場の量を用いて，力が表わされている．つまりそこに登場する量はすべて，単なる言葉ではなく，物理的な意味の明確なものばかりである．これが，本文のいいたいことである．

のはいりこむ余地のない，必然性に支えられた方法であった．その際われわれが遵守した前提は，物質を構成しているすべての素粒子が時間的に変化しない，それぞれあるきまった質量 m をもつということである；したがって各素粒子のエネルギー・運動量ベクトルの成分は $J_i = mu_i$ という形に書きあらわされる．この固有時間 s についての微分

$$\frac{dJ_i}{ds} = P_i \tag{54}$$

もひとつの 4 次元ベクトルである．電磁場が与えられているときは，この P_i は粒子の位置と速度の様子だけに依存し，しかもそれは一次式の関係で速度と結びついている[17)]：

$$P_i = F_{ik} \cdot eu^k. \tag{55}$$

（“場の成分” F_{ik} が荷電粒子の状態に無関係に与えられているかぎり，“電流” $s^k = eu^k$ も “場” の状態に無関係である）．(54) の定義から導かれる $P_i u^i = 0$ という関係式と (55) から

$$F_{ik} u^i u^k = 0.$$

したがって F_{ik} は反対称でなければならない．いま時・空分割により，つぎのように分ける：

17) 訳者注：ここではテンソル成分 F_{ik} はまだ電磁場の強さとどんな関係にあるかは未知としてある．この F_{ik} は単に u の一次形式の係数にすぎない．したがって $F_{ik} = -F_{ki}$ もまだ仮定してない．この反対称性は後に導かれる．

$$(J_i) = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = (E, \underline{\boldsymbol{I}})$$

$$= \{\text{エネルギー，運動量}\},$$

$$(P_i) = \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\underline{\boldsymbol{P}}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \{\Lambda : \text{仕事},\ \underline{\boldsymbol{P}} : \text{力}\},$$

$$(F_{ik}) = (\underline{\boldsymbol{E}}, \underline{\boldsymbol{H}}).$$

これらを用いると（54），（55）から[18)]

$$\frac{d\underline{\boldsymbol{I}}}{dt} = \underline{\boldsymbol{P}}, \qquad \underline{\boldsymbol{P}} = e\{\underline{\boldsymbol{E}} + [\underline{\boldsymbol{v}} \times \underline{\boldsymbol{H}}]\}.$$

この式から $\underline{\boldsymbol{P}}$ は力学的な力であり，$\underline{\boldsymbol{E}}$ は静止している単位電荷に働く力，つまり電場の強さを示し，$\underline{\boldsymbol{H}}$ は磁場の強さを表わし，これは電流 $e\underline{\boldsymbol{v}}$ に力を及ぼすものと解釈してよいことがわかる．上の手順からわかるように電場および磁場の強さを 4 次元世界のひとつの反対称テンソルにまとめるということには，なんらの任意性のはいりこむ余地もない．むしろ，上述のような時・空分割を用いれば，電磁場の強さを荷電粒子に及ぼす力によりきめるという本質的な物理的定義自身から，上述のようなテンソル表現は必然的にでてくる．電磁場 F_{ik} は電荷や電流に力を及ぼすばかりでなく，また F_{ik} はマックスウェルの法則にしたがって，

18） 訳者注：上の分割で F_{ik} を $\underline{\boldsymbol{E}}$ と $\underline{\boldsymbol{H}}$ にわけたが，これらが電場および磁場であるかどうかはまだこの段階ではわからないとしている．これが記号の示すように，電磁場の強さとしてよいことは，つぎの運動方程式の形から，保証されるというのが原著者の考えかたである．

電荷や電流から生みだされる．しかしこの法則をここでもう一度，4 次元的な形式で書いてみせる必要はなかろう．

さて上に述べた種々の法則の全体系はただひとつの変分原理，すなわちハミルトンの原理にまとめることができる [16]．まず物質はひとつの 3 次元的に連続的に拡がった運動する媒質と考える（もちろん，空間的に単一連結である必要はない．いくつかの塊りにわかれているとしてかまわない）；したがって媒質の各部分の位置は，媒質内に割り振られた 3 個の座標 α, β, γ という数値の組で，連続的に表わされる．いま物質は，無限に小さい部分に分割されていると考える．各小部分はそれぞれきまった，時間的にも不変な正の質量 dm をもち，さらにあるきまった，不変な電荷 de をもつものとする．この小部分の歴史を表現するものとして，進展の向きをそなえた 1 本の世界線（むしろ世界線が集まってできた無限に細い糸という方が適当かもしれない）がそれぞれの小部分にあたえられている．この世界線の小さな一部分を考えてみよう．

$$ds = \sqrt{-g_{ik}dx^i dx^k}$$

は世界線のこの一小部分に対応する固有時間の長さである．いまこの部分の 4 次元的体積（つまり“糸”の短かい一部分の長さが上述の ds であり，糸のもつ 4 次元的体積が $d\omega$ である）を $d\omega$ とすれば，それは

$$d\omega = \sqrt{g}dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

であたえられる．g は g_{ik} の 4 階行列式である．そこで不変な方程式

$$dm \cdot ds = \mu_0 d\omega \tag{56}$$

によって，時空内の位置の関数である静止質量密度 μ_0 を定義する．世界の中のある 4 次元的領域 $\boldsymbol{X}$ にわたる積分

$$\int \mu_0 d\omega = \int dm \cdot ds = \int \left(dm \int \sqrt{-g_{ik} dx^i dx^k} \right)$$

を**質量の物質的作用量**と呼ぶことにする．上の右辺の内側の積分は質量 dm をもつ物質の小部分について，その世界線にそった線積分を示す（ただし $\boldsymbol{X}$ の内部に属する部分にわたり積分をとる）．また外側の積分は，$\boldsymbol{X}$ 内に属する物質のすべての小部分にわたる和を示す．このような，(物質部分)×(固有時間）積分から（空間)×(時間）積分への移行は，まったく数学的な操作としてつぎのように遂行される．まず質量の“媒質的密度” ν を

$$dm = \nu\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

で定義する（媒質内に設けた座標系 α, β, γ の任意の変更に対して ν はひとつのスカラー密度として変換される）．媒質座標が (α, β, γ) である世界線の上のひとつのきまった点を出発点として，その世界線の固有時間 s を測ることにする（もちろん，ある世界線からその隣りの世界線に移るとき，それぞれの上の出発点は連続的にその位置が分布しているものとする．つまり出発点は α, β, γ の連続関数としてあらわされるものとする）．したがって物質内の各点のもつ 4 次元座標（つまり世界点としての座標）x^i はその点の媒質座標 (α, β, γ) と時刻 t までにその点が費した固有時間 s の連続関数となる．その関数行列式

$$\frac{\partial(x^0,\,x^1,\,x^2,\,x^3)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma,s)}$$

の絶対値の大きさを Δ とすれば，(56) から

$$\mu_0\sqrt{g}=\nu/\Delta$$

電荷の静止密度 ρ_0 についてもまったくおなじような議論がなりたつ．電磁場の強さはポテンシャル φ_i で表わされる；すなわち，われわれは 4 個の量 φ_i だけを独立な，自由に変化させうる状態量と考える．これに対して F_{ik} は

$$F_{ik}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}$$

によって定義されるものとみなす．**電荷の物質的作用量**とは

$$-\int\left(de\int\varphi_i dx^i\right)$$

であると定義する．ここでも外側の積分は媒質の各部分にわたる和を示し，内側の積分は電荷 de をもった媒質の小部分の世界線にそった積分で，領域 $\boldsymbol{X}$ の内部に属する部分にわたる線積分を意味する．これもまた質量のときと同じように

$$\int de\cdot ds\cdot\varphi_i u^i=\int\rho_0 u^i\cdot\varphi_i d\omega=\int s^i\varphi_i d\omega$$

と書きあらわされる．ここで $u^i=\dfrac{dx^i}{ds}$ は小部分の運動の方向を示し，$s^i=\rho_0 u^i$ は 4 元電流（純粋な運搬電流である）の成分を示す．電荷は物質的作用量のほかに**場的作用量**ももつ．それはマックスウェルの理論によれば，

$$\frac{1}{4}\int F_{ik}F^{ik}d\omega$$

であたえられる．そこでマックスウェルおよびローレンツの法則をすべて包括したハミルトンの原理はつぎのようになる：

全作用量（= 電荷の場的作用量 + 電荷の物質的作用量 + 質量の物質的作用量）は，φ_i の任意の無限小の変化（ただしある有限な 4 次元領域外ではこの変化は 0 とする）に対して，また個々の物質部分の描く世界線の任意の無限小の時空的変位に対してもその値を変えない．

いま φ_i について無限小の変化を行なったとする．ここで $\delta\varphi_i$ は，世界座標 x^i の連続でかつ連続微分可能な関数とする．またこれは有限な 4 次元領域 $\boldsymbol{X}$ の外では 0 とする．まず電荷の場的作用量に対して

$$\delta\left(\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}\right)=\frac{1}{2}F^{ik}\delta F_{ik}=-F^{ik}\frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x^k}$$

がなりたつ．そこで部分積分の原理（本書上巻 243 ページ参照）により

$$\delta\int_{\boldsymbol{X}}\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}d\omega=-\int_{\boldsymbol{X}}F^{ik}\frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial x^k}d\omega=\int_{\boldsymbol{X}}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\delta\varphi_i d\omega.$$

第二に電荷の物質的作用量については，$\boldsymbol{X}$ 内に引きおこされる変化の総量は

$$=-\int de\left(\int\delta\varphi_i dx^i\right)=-\int_{\boldsymbol{X}}(s^i\delta\varphi_i)d\omega.$$

そこで φ_i の変分によりまず

$$\int \left(\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} - s^i \right) \delta\varphi_i d\omega = 0 \tag{57}$$

が導かれる．したがって

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = s^i = \rho_0 u^i$$

がなりたたねばならない．なんとなれば，もし仮にある場所で

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} - s^0 \neq 0 \quad (\text{たとえば} > 0)$$

とすれば，上にでた式の左辺が常に正となるような小さな 4 次元領域が必ず存在し，この内部には，上述の特別な場所も含まれる．そこでいま $\delta\varphi_0$ として，この小領域の内部では正の値をとり，その外部では 0 になるような関数を選ぶ．また $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = 0$ とすれば，その結果は（57）と矛盾する．

これに対して，φ_i は固定し，変分を考えないことにする．しかし物質の各小部分の世界線については変分を考えれば，（§18 で最短曲線を求めた場合と同じように）微分と変分の順序を交換し，部分積分を行なうことによってつぎの結果を得る：

$$\delta \int \varphi_i dx^i = \int \{ \delta\varphi_i \cdot dx^i + \varphi_i d(\delta x^i) \}$$

$$= \int (\delta\varphi_i dx^i - \delta x^i d\varphi_i) = \int \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \right) dx^i \delta x^k.$$

ここで δx^i は各世界線上の任意の点 x^i の無限小変位の成分を示す．したがって

$$-\delta\int\left(de\int\varphi_i dx^i\right) = \int deds\cdot F_{ik}u^i\delta x^k$$
$$= \int\rho_0 F_{ik}u^i\cdot\delta x^k\cdot d\omega.$$

まったくおなじように質量の物質的作用量についても世界線の変位による変分を考えると（この計算は§18で，一般の g_{ik}，つまり x の関数である g_{ik} に対して，既に実施した)，力学の方程式が導かれる：これはさきに求めた場の方程式と併列して置かれるべきものである：すなわち

$$\mu_0\frac{du_i}{ds} = p_i,\quad p_i = \rho_0 F_{ik}\cdot u^k = F_{ik}s^k.$$

上に公式化された作用原理で，質量にもとづく作用量に関して，質量の物質的作用量は考えたが，その場的作用量は議論に登場しなかったことは奇妙に見える．電荷については，この両種の作用量を考えた．この欠陥は，つぎの章で補足される．すなわち電磁場が電荷と相互作用するように，重力場が質量とまったく同じ具合に結びつくことが示されるであろう．

電磁場においては，その力学的力を示すベクトル p_i は，電磁場の局所的な値によってきまるテンソル S_{ik} から

$$p_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}$$

により与えられる．また力学の基本方程式

$$\mu_0\frac{du_i}{ds} = p_i$$

の左辺も，ひとつの“運動”エネルギー・運動量テンソル

$$U_{ik} = \mu_0 u_i u_k$$

に還元される．すなわち

$$\frac{\partial U_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial(\mu_0 u^k)}{\partial x^k} + \mu_0 u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k}.$$

この右辺第 1 項は物質の連続方程式のために $=0$ である．第 2 項は $\mu_0 \dfrac{du_i}{ds}$ に等しい．なぜならば

$$u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds} = \frac{du_i}{ds}.$$

いま全エネルギー・運動量テンソルを

$$T_{ik} = U_{ik} + S_{ik}$$

で定義する．U はこの運動的部分を，S はそのポテンシャル的部分を示す．このようにすれば力学の基本方程式によりエネルギー・運動量の保存則がなりたつ：

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0.$$

§ 27　運動量，エネルギーおよび質量

いままで，物体は必ず物質からできており，物質の概念にとってつぎの二つのことは本質的なものであると，われわれは考えてきた：1）種々の時刻に，物質のあるひとつの部分について議論することは意味のあることである．換言すれば，世界の中で，物質は運動を行ない，その結果，物質の位置や形も刻々変化するが，それでもある時刻に物質のある特定部分に着目したとき，時間が経過した後にも，

物質の中のどの部分がさきに着目したものであるか再確認することが原理的に可能であるということである．つまり世界におこる出来事は，つぎのような形で表わされる．すなわちある物質の描く歴史は，3 次元的連続体をなすこの物質の各部分が描く世界線の集まり，つまり 3 次元的連続体の各点からそれぞれ 1 本ずつ出ている無数の糸の集団で表わされる．2）3 次元的に拡がった物質の任意の部分は，それぞれひとつの量（物質量 = 質量）として測られる．しかし物質に対するこのような描像〔特に 2）の考え〕は既にガリレイによって打ち破られた．ガリレイの考えでは，質量は物質の量ではなくそれは一種の力学的な係数である．すなわち，ある与えられた速度で走っている物体の衝撃の強さ（ドイツ語で “Impetus” または “Impuls”，現在われわれはこれを “運動量” と呼んでいる）は質量を比例係数としてもっている．いまある物体は，それらを互いに衝突させると，ピッタリと互いに粘着する性質があるとする．この種の 2 個の物体がそれぞれ同じ大きさだが反対向きの速度をもって正面衝突したとき，両者が密着して，静止したとすれば，これらの物体の**質量は互いに等しい**と定義する．さらに，速度が増加すると，運動量はどのように大きくなるかを確かめるために，つぎの実験を試みたとする．すなわちいま質量が 1 の物体 2 個を一緒にしたものが速さ v で走っているとする．これに対して質量 1 の他の物体を正面衝突させて，全体を静止させるには，質量 1 の物体をどれだけの速さで相手にぶっつければよいかを調べる実験

である．実験の結果は $2v$ である．この事実から運動量は速度に比例することがわかる．そこでつぎの公式を得る：

$$\underline{\boldsymbol{I}}\ (\text{運動量}) = m\underline{\boldsymbol{v}}\ (\text{質量} \times \text{速度}).$$

以上の議論では運動量の概念のほうが，質量の概念よりも第一義的なものであるように見える．

永久運動が不可能であるというわれわれの経験がエネルギー保存の原理を導いたように，つぎのような基礎的経験から“**運動量保存の原理**”が導かれる．その経験とは，静止しているひとつの物体系は，それ自身の力によって物体系全体をひとつの方向に進行させることは不可能であるということである．運動量の原理はつぎのようにいいあらわすことができる：**すべての物体はその速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ と同じ向きをもった運動量 $\underline{\boldsymbol{I}}$ をもつ．多くの物体が互いに作用しあっているとき，相互作用が完了した後に各物体のもつ運動量を総和したものは，相互作用が始まる以前の総和量に等しい．**いま運動量の定義式 $\underline{\boldsymbol{I}} = m\underline{\boldsymbol{v}}$ の比例因子として質量 m を定義するならば，多くの物体を互いに作用（たとえば衝突）させることによって，この運動量の原理を根拠にして，ちょうど少し前に述べた実験のように，各物体の質量をつぎつぎに測定することができる．力学が研究の対象とする物体は，それと一緒に運動している観測者からみた場合の内的状態が変わることなしに，ただその速度だけが異なった種々の状態をとりうる物体である．内的状態が一定な，そのような物体に対しては質量因子 m は，せいぜいこの物体のもつ速度の大きさ v だけに依存することが可能である：

すなわち $m=m(v)$．しかし m が v に無関係であるということも自明なことではないし，また物体の内部状態が，例えば加熱により，あるいは物体内部におこった化学反応により変化したときでも，$m(v)$ の関数形が，依然として同じ形のままであるということも自明なことではない．質量が v にどのように関係するかを解明したのは相対性原理である．ここで再び上に述べた衝突過程を考えてみよう．すなわち完全に同じ内的組成をもつ2個の物体 k_1, k_2 が，大きさは同じだが反対向きの速度 $\pm\underline{\boldsymbol{v}}$ をもって正面衝突をし，両者は密着してひとつの物体 k となって静止するという現象である[19]．いまひとつの基準物体 K を考え，これを基準としたとき物体 k は速度 $\underline{\boldsymbol{u}}$ で運動しているとする．また K から眺めたとき，衝突前の k_1, k_2 の速度をそれぞれ $\underline{\boldsymbol{v}}'$, $\underline{\boldsymbol{v}}''$ とする．K を基準として運動量の法則を適用すると，ベクトル

$$m(v')\underline{\boldsymbol{v}}'+m(v'')\underline{\boldsymbol{v}}''$$

はベクトル $\boldsymbol{u}$ に平行であることがわかる．

ここでガリレイの運動学を認めることにすれば，$\underline{\boldsymbol{v}}'-\underline{\boldsymbol{u}}=\underline{\boldsymbol{v}}$, $\underline{\boldsymbol{v}}''-\underline{\boldsymbol{u}}=-\underline{\boldsymbol{v}}$，したがって，

$$\underline{\boldsymbol{v}}'+\underline{\boldsymbol{v}}''=2\underline{\boldsymbol{u}}\text{（これはもちろん }\underline{\boldsymbol{u}}\text{ に平行）}.$$

この結果から $m(v')=m(v'')$ でなければならない．つまり m は v に無関係となる．したがって，m は物体の内的

19）この例のかわりに k_1, k_2 が，静止している媒質の中に同時に，反対向きにとびこんで，その中で媒質の抵抗により静止するという過程を考えてもよい．

組成だけに依存する定数である．これをその物体の**質量**と呼ぶ．このような知識，すなわち m が v に無関係ということがわかったから，これを任意の反応に適用してみよう．いま種々の質量 m をもった多数の物体の集団を考えよう．それらの物体はそれぞれ異なった速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ をもっているとする．これらは相互作用の結果，反応のあとでは，反応前とは異なった質量 $\overline{m}$，および速度 $\underline{\bar{\boldsymbol{v}}}$ をもつとする．運動量の法則によれば，

$$\sum m\underline{\boldsymbol{v}} = \sum \overline{m}\underline{\bar{\boldsymbol{v}}} \tag{58}$$

が成りたつ．これを前に述べた基準物体 K からみると

$$\sum m(\underline{\boldsymbol{v}}+\underline{\boldsymbol{u}}) = \sum \overline{m}(\underline{\bar{\boldsymbol{v}}}+\underline{\boldsymbol{u}}).$$

この関係式からは**質量保存の法則**

$$\sum m = \sum \overline{m} \tag{59}$$

が導かれる．この法則の意味は“物体系の全質量はその内部の種々の反応によっても変化しない”ということである．しかし上の関係式からエネルギー原理を導くことはできない．実際，われわれがいま問題にしている過程では，熱的，ならびに化学的変化が除外されていないから，エネルギーの純粋に力学的な部分についての保存則

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{\overline{m}\bar{v}^2}{2} \tag{60}$$

は成立しない．

以上はガリレイの運動学にもとづくものであるが，これに対して，アインシュタインの運動学を基礎にとれば，$c=1$ として，つぎのようになる：基準物体 K からみて

$$\frac{\underline{\boldsymbol{v}}'}{\sqrt{1-(v')^2}}+\frac{\underline{\boldsymbol{v}}''}{\sqrt{1-(v'')^2}} \text{ と } \underline{\boldsymbol{u}} \text{ が平行.}$$

そこで前の議論と比較して

$$m(v)=\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$$

とおけば，運動量の定義，運動量保存の法則，アインシュタインの運動学の三者は互いに矛盾なくなりたつことになる．ここで m は，物体の内部の状態だけによりきまり，速度の大きさ v には無関係な比例因子である．いままでの文献では $m(v)$ を物体の質量と呼ぶべきか，それとも定数の m を質量と名づけるべきかについて統一された見解が見られなかった．そこでわれわれは後者，すなわち v によらない定数の m を質量と呼ぶことにきめる．ガリレイの運動学にしても，またアインシュタインの場合でも，$m(v)$ は，v に無関係な一定の因子 m と速さの普遍的な関数 $\varphi(v)$ ［ガリレイでは $\varphi(v)=1$，アインシュタインのときは $\varphi(v)=1/\sqrt{1-v^2}$ ］の積にあらわされることがわかった．さきに述べた質量の等しいか否かをしらべるガリレイの判定法，すなわち同じ速さ v の 2 個の物体 k_1，k_2 を正面衝突させる判定法で，$m_1(v)=m_2(v)$ という等式は，上に導かれた結果から，任意の v に対して適用できることがわかる．いまひとつの物体の運動状態をその速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ で表現するかわりに，この物体の描く世界線の方向を示す世界ベクトル $\boldsymbol{e}$ ［ただし $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=-1$ に規格化してあるものとする］で表わすならば，物体系の任意の反応過程に対して，運動

量保存則は，つぎのことを主張するものである．すなわち

$$\boldsymbol{d}=\sum m\boldsymbol{e}-\sum \overline{m}\overline{\boldsymbol{e}}$$

という世界ベクトルの空間成分は 0 になるべきである．つまり $\boldsymbol{d}$ は時間軸に平行な世界ベクトルである．ところで運動量保存の法則は容認された任意の基準物体からみて，常に成立すべきものである．いま二つの互いに独立な時間的方向に対応して世界を時・空分割したとき，そのいずれの場合にも上述のことがなりたつためには，結局 $\boldsymbol{d}=0$ でなければならない．そこで運動量保存則

$$\sum\frac{m\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}=\sum\frac{\overline{m}\underline{\overline{\boldsymbol{v}}}}{\sqrt{1-\overline{v}^2}} \tag{58'}$$

に，さらにこの時間成分として，**エネルギー保存の法則**

$$\sum\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}=\sum\frac{\overline{m}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{61}$$

が付け加わる．

ここで，エネルギーとして $m\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}-1\right)$ ではなくて，$m/\sqrt{1-v^2}$ という量が登場したことは，注意すべき大切な点である．[もし空間の長さ，および時間の単位として $c=1$ という規格を使わなければ，エネルギーは $mc^2/\sqrt{1-(v/c)^2}$ となる]．たとえば上に考えた衝突の例，つまり同じ質量 m をもった 2 個の物体が同じ速さ v で正面衝突して，両者が 1 個の物体（その静止の質量を $\overline{m}$）となって静止するという実験では，われわれのエネルギー保存則によれば，

$$\overline{m} = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2}}$$

となる．したがってこのような例では，結合された物体の質量は個々の物体の質量の和より

$$\Delta m = \overline{m} - 2m = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\right)$$

だけ大きくなる．ところで，k_1, k_2 は質量 $2m$ のひとつの物体 k をまっぷたつに切断して作られたものと考えれば，これらの k_1, k_2 を上の衝突過程で結合することにより，再びもとの k ができる．したがってこれはひとつの循環過程と考えられる．しかしこの循環過程のあいだに k の内部の状態は変化する．すなわちこの物体の温度は上昇する．したがってその質量が循環の前に比べて大きくなっていても驚くにはあたらない．なんとなれば物体の質量はその履歴には無関係に，ただその内的状態によって決定される．したがってどのような方法でこの最後の，温度の上昇した状態になろうとも，同じ加熱は同じ質量の増加 Δm を引きおこす．したがって Δm は，この熱的な状態変化に対応するエネルギーの尺度をあたえる．以上の考察から，(61) は多くの物体の間の任意の反応に対する現象論的なエネルギー保存則を表わしているばかりでなく，さらにもっと重要なつぎの主張をもその中に含んでいることがわかる．**物体に外からエネルギーを与えたり，あるいは逆に物体からエネルギーを奪い去れば，物体の慣性質量は変化する．質量の増加量は静止している物体に外から与えられたエネルギー**

に正確に一致する．（CGS - 単位系を使うときは［質量の増加量］$= \dfrac{1}{c^2} \times$［与えられたエネルギー］となる）．

上に述べたことの内容をもう少し厳密に扱ってみよう！まず現象論的エネルギー保存則はつぎの事実と結びついている．すなわちひとつの物体系 k にある変化 V を引きおこすためには，この物体系を一般に他の物体 k_0 と相互作用させねばならない．両者の間に反応がおこった後では，この k_0 にもある変化 V_0 が残留する．この事情を，われわれは，k の変化 V が k_0 に変化 V_0 を引きおこしたという．しかしわれわれはいつでも，この V_0 が前もって規定された“変化量の単位”の整数倍となるようにこの反応を導くことができる．たとえば，“1 グラムの水”――この言葉により私は，あるきまった状態（たとえば静止状態）にある，ある一定量の水を指すものと了解する――の温度を 1℃ だけ高めることを変化量の単位として採用することができる．その場合には V_0 は，ちょうど n グラムの水の温度を 1℃ だけ上げるか，または逆に下げるかのどちらかでなければならない．これに応じた変化 V にともなうエネルギーの変化量は $+n$ または $-n$ ということになる．ところでエネルギー原理によれば，どのような中間過程を経由しようとも，変化 V が引きおこす k_0 の変化 V_0 は，常に V だけによってきまりその途中の過程には無関係で，単位の変化量の $\pm n$ 倍に等しいあるきまった値をとるべきである．――いま，1 グラムの水の温度を 1℃ だけ上昇させたことによる水の質量の変化を 1 とするように質量の単位をとれば，

保存則（61）を物体 k と k_0 をひっくるめた体系に適用するとき，つぎのことがいえる．変化 V のおこる前の物体系 k だけについての $\sum \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ と変化後のそれの差は，変化 V_0 のあとさきにおける水熱量計（k_0）の質量差に等しい．つまり $\pm n$ である．したがって現象論的に公式化されたエネルギー保存の法則は実際われわれの関係式（61）の中に含まれていることがわかる．しかもある変化に際して発生（または消失）するエネルギーの量は状態量 $\sum \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ の増加量（減少量）に等しいことも示された．そこでわれわれは $\sum \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ を物体系の**状態エネルギー**と呼ぶことにする．このように呼ぶということには，エネルギー保存則からさらに一歩進んで，つぎの二つの認識が前提としてそのうちに含まれている．1）エネルギーは，本来ひとつの**状態変化**に帰属しているのではなく，ひとつの**状態そのもの**に帰属している．その場合，物体系の変化にともなって発生（または吸収）するエネルギー量は，物体系の始状態および終状態のエネルギーの差にちょうど一致するように各状態にそれぞれそのエネルギーが付随している．われわれは既に，電磁場の状態が変化するとき，これに結びついた，場のエネルギーの増加量に対する公式ばかりでなく，電磁場のそれぞれの状態自身に対するエネルギーに対しても，異論の余地のない方法で，ひとつの公式を規定した．ここでいままたわれわれは質量をもつ物体に対しても同じとりきめを行なったわけである．つまり単に物体の状態変

化に対応したエネルギー差ばかりでなく，その各状態に対するエネルギーの絶対的な値を規定した．2）質量 m の物体が速度 v で運動しているとき，この物体のエネルギーは $m/\sqrt{1-v^2}$ である．この公式は質量とエネルギーの間の普遍的な関係を表現している．特にこの公式から，運動エネルギーの値を導くことができる．ここで運動エネルギーとは，ひとつの静止している物体が，その内部状態を変えることなしに，速度 v の運動状態に移行したさいの，この物体のもつエネルギーの増加量のことである：

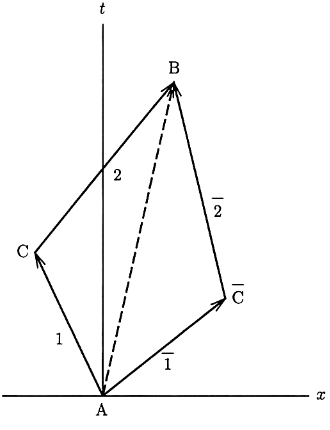
$$\text{運動エネルギー} = m\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}-1\right).$$

物体どうしのあいだの反応のうちで，重要なもののひとつは，いわゆる弾性衝突である．これはすべての物体が，反応後にも，その内部状態が全然もとのままであるような衝突現象である．したがって弾性衝突では，エネルギー原理（61），運動量保存則（58′）のほかに，

$$m_1 = \overline{m}_1, m_2 = \overline{m}_2, \cdots. \tag{62}$$

がなりたつ．ガリレイ－ニュートンの力学では事情は必ずしも見とおしがよいとはいえない．そこでは，さきにのべた質量保存の法則（59）のために，（62）のなかのどれかひとつの等式は余計なものとなる．そのかわりに，（60）の形の運動のエネルギーの保存則が付け加わる．この法則がどこから生れてきたかは，アインシュタインの力学をもとにして，その $c \to \infty$ の極限をとることによって，容易に理解されよう．2 個の物体の弾性衝突のときは，各物体の質量，

衝突前の両者の速度，および，つぎのような“方向”〔これを原著では“Stossdurchmesser”と呼んでいる：訳者〕がわかっていれば，衝突後の両物体の速度は一意的に決定される．いま衝突前の物体 k_1，k_2 のもつ空間的運動量を $\underline{\boldsymbol{I}}_1$，$\underline{\boldsymbol{I}}_2$，衝突後のそれを $\bar{\underline{\boldsymbol{I}}}_1$，$\bar{\underline{\boldsymbol{I}}}_2$ とする．$\bar{\underline{\boldsymbol{I}}}_1-\underline{\boldsymbol{I}}_1=\underline{\boldsymbol{I}}_2-\bar{\underline{\boldsymbol{I}}}_2$ は，衝突のさいに k_2 から k_1 に移行した運動量を示す．この運動量ベクトルの（空間内における）方向が上述の“方向”である．これを x と呼べば，$\underline{\boldsymbol{I}}_1$，$\underline{\boldsymbol{I}}_2$ の x に垂直な成分はその値を変えない．上に述べた事情は図で示せば，容易にわかる．そのためには“方向” x に垂直な空間の 2 成分を省略して，4 次元運動量の t 成分と x 成分だけを第 18 図のように図示すればよい．図の $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=2$ は衝突前の k_1，



第 18 図

k_2 のもつエネルギー・運動量ベクトルであり，$\overrightarrow{\mathrm{A\bar{C}}}=\bar{1}$，$\overrightarrow{\mathrm{\bar{C}B}}=\bar{2}$ は衝突後のそれを示す．ここで $\bar{1}$ と 1 は同じ“長さ”（$\overline{m}_1=m_1$）をもち，$\bar{2}$ と 2 は“長さ”が $\overline{m}_2=m_2$ である（ここでいう“長さ”とはミンコウスキー幾何学の意味での長さである）．この意味で $\triangle$ABC と $\triangle$AB$\bar{\mathrm{C}}$ は合同である [17]〔訳者注：この図から，1, 2 が与えられていれば，$\bar{1}, \bar{2}$ が一通りに決定されることがわかる〕．

この節に述べたような，電気力学とは無関係な，力学の基礎づけは，力学の歴史的起源にしたがって，運動量保存則と密接に結びついている．まったく同様に，ちょうどランジュバンが 1922 年の春，チューリッヒで行なった講演の中で，きわめてエレガントな方法で証明したように，力学を相対性原理と，エネルギーの保存則だけから創りあげることも可能である．物理学全般に対するエネルギー原理のもつより大きな意義や，またこの原理がより広範にわたって実験的に基礎づけられていることを考えると，多分，ランジュバンの方法のほうがここにいままで述べてきたものより優れているであろう．いずれにしても，ここに述べた議論は，ランジュバンの講演に刺激されて書いたものである．

媒質中での電気力学では，電磁場による力の密度 p_i は $(p_i u^i)=0$ を満足しない．なぜならば，電荷は物質に密着しているとはかぎらないから（運搬電流のほかに伝導電流とか偏極電流等も存在する）．その結果，質量が m_0 である静止した導体中に定常電流が流れているとき，この導体に

働く力の総和は0であっても，導体の各部で，仕事がなされる．この仕事がジュール熱を引きおこす．いま導体の静止系からみて，単位時間中に発生する熱量を Λ_0 とすれば，ある基準空間に対して導体が一定速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ で走っているとき，この基準系からみれば

$$(P_i)=\left\{\frac{\Lambda_0}{\sqrt{1-v^2}},\frac{\Lambda_0\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}\right\}.$$

すなわち

$$\text{仕事}=\Lambda_0,\qquad \text{力}=\underline{\boldsymbol{P}}=\Lambda_0\underline{\boldsymbol{v}}$$

となる[20]．そこで運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}\right)=\underline{\boldsymbol{P}}$$

は，m_0 が時間的に不変とすれば，矛盾することになる．上の式の両辺と $\underline{\boldsymbol{v}}$ の3次元的スカラー積をとることにより，

$$\frac{dm_0}{dt_0}=\Lambda_0\qquad (t_0\text{：静止系における時間})$$

となる．これは，物体内における熱量の発生が，その物体の慣性質量の増加をともなうことを示すよい例である．

いままで調べてきた物体間の反応では，電磁波の放射はないものと仮定してきた．しかしマックスウェルの理論によれば，電磁場もエネルギーと運動量をもっている．これらも一緒に考慮してはじめて保存則は一般的に厳密になりたつことになる．いまひとつの物体が，ある方向に光を放

20）訳者注：仕事，および力の定義については，本書上巻 421 ページを見よ．

射すれば，その物体は光から反跳をうける．つまり物体は放射された光のもつ運動量と大きさは等しく向きが反対の運動量を受ける．同様に鏡による光の反射では，鏡に入射する光と反射されて出てゆく光のもつ運動量の差だけ鏡の力学的運動量（これが光の圧力）が増加する．そこでまず，空間的に限られた領域内にある電磁波（これは光の速さ c をもって伝播していく）のエネルギーと運動量について考えてみよう．それにはわれわれは数学的な補助的考察が必要である．

ひとつの 4 次元アフィン空間内にベクトル密度 $\boldsymbol{s}^i$ が与えられているとする．この 4 次元発散 $\partial \boldsymbol{s}^i/\partial x^i$ は恒等的に 0 とする．また $\boldsymbol{s}^i$ 自身もある管状の 4 次元領域 Ω の外では 0 とする．われわれが用いる座標系の $x^0=$ 一定という 3 次元的“平面”はすべてこの Ω を切り，その切口は有限の 3 次元的ひろがりをもつものとする．管 Ω の切口（$x^0=$ 一定）にわたる積分

$$e=\int \boldsymbol{s}^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

は x^0 だけの関数である．$\partial \boldsymbol{s}^i/\partial x^i=0$ からただちに，

$$\frac{de}{dt}=0$$

を得る．したがって e は t にも無関係な定数である．ガウスの定理によれば，e は任意の場所で管 Ω を切る任意の 3 次元的曲面を通過して流れ出るベクトル密度 $\boldsymbol{s}^i$ の総流量として表わされる（ここに考えている 3 次元的曲面と $x^0=$

一定という"平面"ではさまれた管 Ω の一部分（4 次元領域）にガウスの定理を適用すればよい)；したがって e は座標系 x^i のえらびかたにも無関係な，ひとつの不変量である．

上に述べた考察は後にひとつの閉じた体系のもつ電荷という概念を扱うときに役にたつ．ここではわれわれは上の $\boldsymbol{s}^i$ を任意のテンソル密度 $\boldsymbol{S}_i^k$ におきかえる．ただし

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}_i^k}{\partial x^k} = 0$$

がなりたつものとする．また $\boldsymbol{S}_i^k$ 自身は Ω の外では 0 とする．いま世界点の座標によらない定数の成分 ξ^i をもつ任意のベクトルを考える．さらに

$$\boldsymbol{s}^k = \boldsymbol{S}_i^k \cdot \xi^i$$

とおけば，さきのベクトル密度 $\boldsymbol{s}^i$ に対して導かれた結論はそのままこの新しい $\boldsymbol{s}^k$ に対しても成立する．そこで Ω を切る任意の平面 $x^0 =$ 一定 について積分

$$J_i = \int \boldsymbol{S}_i^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

を計算すれば，これは x^0 に無関係である：

$$\frac{dJ_i}{dt} = 0.$$

さらに $J_i \xi^i$ は座標系のとりかたに無関係なひとつのスカラーであるから，J_i は x^i に無関係なひとつの共変ベクトルの成分である．

真空中の電磁場に対してはひとつの対称エネルギー・テ

ンソル S^{ik} がある．標準座標系を用いれば，電磁場が存在するところでは，いたるところで，エネルギー密度 S^{00} が常に正になる．もし電磁場が空間的に無限の遠方まで拡がっていないならば，任意の標準座標系において，S^{ik} に対応したテンソル密度 $\mathfrak{S}_i^k$ に対して上に述べた議論を応用することができる．その結果，電磁場に対してひとつの定数のエネルギー J_0 と，定数の運動量（J_1, J_2, J_3）を賦与することができる．これら 4 個の J_i は，座標系をいかにとろうともひとつの共変世界ベクトルを作る．しかしこのベクトルは空間的ベクトルとなるわけにはいかない[21]．なんとなれば，もし J_i が空間的ベクトルだとすれば，適当な標準座標系をえらべば $J_0=0$ とすることができるはずである．しかしエネルギー密度は決して負にはならないから，$J_0=0$ となるのは，電磁場自身がいたるところですべて 0 となる場合にかぎる．したがって必然的に

$$(J_i J^i) \leqq 0.$$

上の $=0$ の場合は，一様な平面電磁波の任意の有界な部分についてなりたつ．一般には <0 がなりたつ．したがって世界を時・空分割したとき運動量 $=0$ となるように時間軸をえらぶことも可能である．

ひとつの静止物体 k が光波を放射したとする．ただしこの光の全運動量 $=0$，全エネルギー $=E_0$ とする．——たとえば球面波の場合には，このようになる．また二つの同

21）　訳者注：時間的ベクトル，空間的ベクトルの定義については，本書上巻 372 ページを参照．

じ強度の光が反対方向に向かって放射された場合にも同様である．——ところで上で求まった結論によれば，光のもつエネルギー E と，その運動量 $\underline{\boldsymbol{I}}$ は任意の座標系を基準にしたとき，これらが一組となってひとつの世界ベクトルを作る．そこでいま k が，ある第 2 の基準物体からみたとき，速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ で走っているとすれば，この第 2 の物体を基準としたときの光のエネルギー E と運動量 $\underline{\boldsymbol{I}}$ は

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \underline{\boldsymbol{I}} = \frac{E_0 \underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}$$

で与えられる．一方物体 k のエネルギー，運動量は（第 2 の物体からみたとき）それぞれ

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \frac{m\underline{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

物体の速度は，光を放射しても変化しないから，k の質量 m は，光を放射したさいに光の持ち去ったエネルギー E_0 に等しい Δm だけ減少しなければならない．この例から，アインシュタインはまずエネルギーが慣性をもつという法則を発見した [18].

さらに興味があるのはただ 1 個の平面波の場合である（この運動量はいかなる座標系を基準にとっても，決して 0 にさせることはできない）．いま放出された光のエネルギーを再び E とすれば，その運動量の方向は，光の伝播方向に一致し，その大きさはやはり E である．いま光を放出する前に静止していた物体の質量を m とする．また光を放出後のこの物体の質量を m'，またその速さを v とすれば，保

存則から

$$\frac{m'}{\sqrt{1-v^2}} = m - E, \qquad \frac{m'v}{\sqrt{1-v^2}} = E$$

となる．そこで光が物体にあたえる反作用により物体のもらう速さは

$$v = \frac{cE}{mc^2 - E}$$

となる．

電磁場のエネルギー・テンソルの対称性から，さらに新しい保存則が導かれる．まずよく知られている方法で 3 次元角運動量 $\underline{\boldsymbol{L}}$ の成分

$$L_1 = \int (x^2 \boldsymbol{S}_0^3 - x^3 \boldsymbol{S}_0^2) dx^1 dx^2 dx^3, \qquad L_2, L_3$$

が t に無関係な定数であることを証明できる．これに加えて，時間座標 x^0 と，空間座標の同格であることから，さらにつぎの 3 個の量も定数となる：

$$M_1 = \int (x^0 \boldsymbol{S}_0^1 - x^1 \boldsymbol{S}_0^0) dx^1 dx^2 dx^3, \qquad M_2, M_3.$$

これら 3 個の M_i は一組となって空間ベクトル $\underline{\boldsymbol{M}}$ の成分をなす．いま

$$\int \boldsymbol{S}_0^0 x^i dx^1 dx^2 dx^3 = a^i \int \boldsymbol{S}_0^0 dx^1 dx^2 dx^3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

によって定義される a^i を座標とする空間点 ($x^i = a^i$, $i = 1, 2, 3$) を，いま考えている電磁場の“エネルギーの中心

点”（あるいは重心）と呼ぶことにする．$\boldsymbol{S}_0^0$ はいたるところで正であるから，重心は必ず電磁波によってしめられている空間領域のなかにある（もっと正確にいえば，重心は電磁波によって占有された空間部分を包む凸領域のなかにある）．いまある基準系からみたときの重心の速度を $\underline{\boldsymbol{v}}$ とすれば，$\dfrac{d\boldsymbol{M}}{dt}=0$ は

$$\underline{\boldsymbol{I}} = E\underline{\boldsymbol{v}} \tag{63}$$

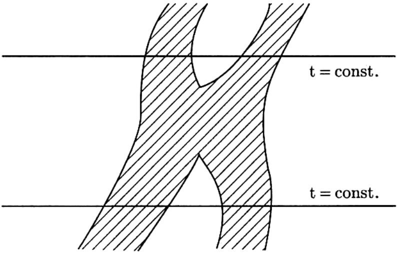
と同等である．ここで E は電磁場のもつ全エネルギー，$\underline{\boldsymbol{I}}$ はその運動量である．もし電磁場全系のもつ速度とは，そのエネルギーの中心点の速度をさすものとすれば，ここでも運動量と速度が平行であるということがなりたつ．E はもちろん，基準物体のとりかたによって，その値が変わる．しかし $|\underline{\boldsymbol{v}}|=v<1$（1 にはならない）である．そこで $E=E_0/\sqrt{1-v^2}$ によって定義された E_0 は座標系のとりかたに無関係な不変量となる．この E_0 を電磁場全体の持つ質量と呼ぶことについて，何の躊躇すべき理由もない．このように質量を定義すれば，電磁場全系のもつエネルギーと運動量に対して，1 個の質量をもった物体のそれとまったく同じ関係がなりたつ [19].

電磁場と同様に，目方をもった物体どうしの間の反応についても，個々の反応を追跡するためには，物体系全体の全エネルギーや全運動量の議論にとどまらず，1）任意の瞬間に着目し，2）空間的にある限られた部分にあるエネルギーや運動量についての考察をすすめねばならない．その

結果，エネルギー密度，運動量密度，エネルギーの流れ，および運動量の流れといった種々の概念に到達する．これらの概念は，ガス体や弾性体の運動現象とか熱的現象を考えるとき，それぞれがもっと明確になる．上にならべた諸量は全体としてひとつのテンソル密度 $\boldsymbol{T}_i^k$ を作る．それは

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}_i^k}{\partial x^k} = 0 \tag{64}$$

を満足する．ここでさらにこのテンソル密度に対応するテンソル T^{ik} が対称であり，そのうえ，T^{00} は，任意の基準空間を基準としたとき，常に正と仮定する（すなわち任意の時間的世界ベクトル e^i に対して $\boldsymbol{T}_i^k \cdot e^i e_k > 0$ と仮定する）．このように仮定すれば，いままで電磁場について述べたつぎのような種々の法則は，物体系の場合にもなりたつことがわかる：すなわちエネルギーおよび運動量の保存則；いかなる容認された座標系を基準にしても，エネルギーと運動量は一組となって 4 次元ベクトルとなり，しかもそれは決して空間的ベクトルになりえない；角運動量の保存則；(63) が成立する（ただしこの $\underline{\boldsymbol{v}}$ はエネルギーの中心点の速度を示す）；エネルギーの中心点が物体系を含む最小の凸包（ひらたくいえば，ある瞬間，物体系が占める空間領域を包む最小の凸形の領域）の中にあるという事実，および $|\underline{\boldsymbol{v}}| \leqq 1$．特にエネルギーの保存則を導くためには，互いに反応しあっている物体をすべてひとまとめにして，ひとつの体系とみなす必要がある．第 19 図では 2 個の物体系が互いに作用し合う場合が図示されている．斜線を引いてな



第 19 図

い部分ではエネルギー・テンソルは 0 である．反応の前後にそれぞれひとつずつ切断面 $t=$ 一定 が描かれている．反応の前後いずれの場合にも，全体系のエネルギー・運動量ベクトルは，個々の物体系のもつエネルギー・運動量ベクトルの和に等しい．しかし質量 m についてはこのような簡単な和の規則がなりたたない．ここで m はエネルギー E，運動量 $\underline{\boldsymbol{I}}$ と

$$m^2 = E^2 - (\underline{\boldsymbol{I}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}})$$

という 2 次式で結ばれている．狭義の力学において扱う物体は，それに付随した容認された基準空間をもとにした場合，(つまりこの空間からみて，この物体が静止している場合)，その物体の状態が常に量的に不変であるような物に限られている．そこでこのような物体に対しては，その内部的状態と運動状態を分離するという力学にとって基礎的な考え方が許されることになる．しかしつぎのような力学の基本的約束は一般的に妥当であるということがわかる：ある物体の速度とは，一般にその物体の（力学的のみなら

ず，すべての種類の）エネルギーの中心点のもつ速度を意味すると規定する．しかし小さな物体では $\underline{\boldsymbol{v}}$ の意味をこのように厳密に定義することは不要である：小さな物体に対してはさらに，(63) のほかに，

$$\underline{\boldsymbol{L}} = [\underline{\boldsymbol{r}} \times \underline{\boldsymbol{I}}]$$

がなりたつ．$\underline{\boldsymbol{L}}$ はこの物体の角運動量で，これが“てこの腕”$\underline{\boldsymbol{r}}$ と (63) にあたえられた運動量とのベクトル積であらわされることになる[22)]．

このようにして，われわれは物質に対して新しい，純力学的な描像に到達した．これは以前から力学に対するガリレイ的な基礎づけにはぜひとも必要なものとされていた[23)]．相対性原理によれば異なる時刻における二つの世界点が空間的に同一の点であると主張することは座標系のとりかたに依存することで，これには絶対的な意味はない．したがってある時刻におけるある空間点が，過去のある空間点と空間的に同一のものであることを再確認できるというあや

---

22) 訳者注：$\underline{\boldsymbol{L}}$ はもともと本書上巻 446 ページにある積分で定義されたものである．しかし物体が小さければ，この積分は，本文のようにエネルギーの中心点の位置を示すベクトル $\underline{\boldsymbol{r}}$ と，その速度 $\underline{\boldsymbol{v}}$ のベクトル積で書きあらわされることになる．ここで物体が“小さい”とは，$|\underline{\boldsymbol{r}}|$ に比べて，物体のひろがりが十分に小さく，またその内部で $\boldsymbol{S}_k^i$ がはげしく変化しないことを意味する．

23) カントもまた『自然科学の形而上学的基礎』(Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft) のなかで，“物質は単なる存在（ひらたくいえば，われわれの目にうつる形）として空間の一部を占有しているばかりでなく，それのすべての部分が力によって空間をみたしている”といっている．

まった信念を，われわれは放棄しなければならない．これと同様に，本節のはじめに述べた物質に対するわれわれの描像の 1)，すなわち**ある時刻における物質のある一部分が他の時刻における物質のある部分と同じものであるなどと主張することも，もはや無意味である**．電子は以前は，非物質的な電磁場の中にある，物質的な，電磁場からみて一種の異物とみなされていた．しかしいまは，電子は，電磁場に対して明確な境界をもたない小さな領域のことであり，その領域内では電磁場の強さや，電荷密度が異常に大きな値を持つものと考えられている．このような“エネルギーの瘤”は，ちょうど，海面上を波が伝播するように，真空中を移動する．したがって海面の波を構成している材料の水が刻々，異なっているように，あらゆる時刻に，電子を構成している素材は変化し，決して“ひとつの同じ物質”ではない．場が，その存在のために，場の生みの親として物質を必要とすると考えるのは誤りである．むしろ逆に**物質は場の産物**である．**原子核や電子**は，外力の作用により右，左に押されて運動をする窮極的な，不変の要素では決してない．むしろこれら自身も連続的にひろがっており，その内部の各微小部分は細かい流動的変化を行なっていると考えられる．そこで以上の考えに従うならば，場がなぜこのような粒子状の構造をもつ部分をその中にもつか，またそれがもつエネルギーの瘤が，場のエネルギー，運動量の流れのなかに持続的に存在しつづけるのはなぜか（まったく変化しないで，そのままの姿で存在しつづけるとはいえ

ないが，しかし非常に高い精度で，ほとんど同じ内的状態で，この瘤は存在しつづける）という疑問を解明することは，場の理論の課題となる．これが**物質の問題**である．今後われわれが探究しなければならない場の法則は，エネルギーの瘤についてひとつ，あるいは少数個の平衡状態[24)]の存在を可能にする必要がある．しかもその場の法則は，これらの平衡状態のあいだで，そのひとつから他の状態への連続的移行を禁ずるような法則でなければならない．このような平衡状態で，われわれが知っている唯一のものが電子である．**この法則によれば**，すべての電子は時間的に変化しない同じ電荷をもち，また同じ質量をもつことになる．そこで多くの素粒子から合成されている物体の全エネルギーや全質量について，その窮極的な物質的構成要素（つまり素粒子）のもつ窮極的なエネルギーを，素粒子どうしを結びつけている結合エネルギーから分離できることになる——物質の問題を解明するには，もちろん，マックスウェルの場の理論のままでは不可能である．これにさらに新しい状態量を追加して，この理論の修正あるいは拡張をする必要がある．電子の中に凝縮されている負の電荷は，もし何か他の凝集力がないならば，クーロンの反撥力により

24) 訳者注：この平衡状態とは電子，その他の素粒子をさす．つまり素粒子は場のエネルギーの瘤で，しかも，この瘤にはいろいろな姿があり，そのひとつひとつが既知の各素粒子に対応するという考えである．したがって電子が他の素粒子に連続的に移行しないためには，これら各種の瘤の状態の間に連続的移行がおきてはならない．

爆発してしまう．電子の物質的描像によれば，電子はひとつの剛体球で，それに電荷が固く付着していると考えられている．しかし新しい考えでは，電子は力学的に，ただ相互的に働く力によって作られていると考えられる．

いずれの場合でも，場には必ずひとつのテンソル密度 $\boldsymbol{T}_i^k$，すなわち，エネルギー・テンソル密度が与えられており，これは保存則（64）を満足するものと仮定する．（64）は，物質を場の理論的に記述しようとするときは，積分型の保存則の基礎となる．もし $\boldsymbol{T}_i^k$ がもともとの場の量によって書きあらわされれば，（64）は場の量のあいだの4個の関係式をあたえることになる．このようにして，物質は場のひとつの現象であるから，物質の力学的法則は，結局は場の法則の結果として登場することになる．

場の存在する空間的領域の任意に限られた部分 V に対して積分

$$J_i = \int \boldsymbol{T}_i^0 dx^1 dx^2 dx^3 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

を作れば，

$$\frac{dJ_i}{dt} = K_i$$

がなりたつ．J_i は領域 V のもつエネルギー，および運動量を意味する．また K_i はこの領域に働く **4 次元力**（または四元力，Viererkraft）である．ガウスの定理によれば，K_i は V の表面 Ω を通して流入するベクトル密度 $(\boldsymbol{T}_i^1, \boldsymbol{T}_i^2, \boldsymbol{T}_i^3)$ の流量に等しい．したがって**力は V の内部の場の状態には**

無関係である．V の境界面 Ω 上で場の量が必ずしも 0 とはならない（ここに考えているような一般的な）場合には，J_i は一般には世界ベクトルの共変成分にはならない．

$\boldsymbol{T}_i^k$ は，われわれの感覚を通して，われわれが知ることのできるものと直接に結びついている．たとえば，いま私が一片の氷を手につかめば，氷と私の手の接触点で，エネルギーの流れを熱として，また運動量の流れを圧力として感ずる．また私の眼の網膜上皮の表面における光学的エネルギーの流れが光に対する私の感覚を決定する．このようにわれわれの感覚器官を通して明らかにされた“物質”の背後には場が隠されている．この場に固有な法則性や，エネルギー量を規定する法則をさぐり出すことについて，輝かしい先鞭をつけたのはマックスウェルである．

既に相対性理論が完成される以前から，電子のもつ慣性質量を電子自身に付随した電磁場のエネルギーから説明しようとする試みがあった [20]．ポテンシャル $e/4\pi r$ から作られる静電場により半径 a の小球の外部の空間に貯えられたエネルギーは

$$= \frac{1}{8\pi}\int_a^\infty \frac{e^2}{r^4}\cdot r^2\cdot dr = \frac{e^2}{8\pi a}.$$

電子は電荷 e をもった，半径 a の小球であるとし，電子の外部にあるエネルギーのみを考えにいれることにすれば，もし半径 a を

$$m = \frac{e^2}{8\pi a c^2} \tag{65}$$

のようにえらべば，電子の観測された質量 m がちょうどみちびかれる．なお上の a は 10^{-13} cm の程度の値となる．

物質の原子的構造を無視する現象論的理論では，電子，原子等に貯蔵されたエネルギーも，物体全体にわたって連続的に分布しているものとして扱われる．これをわれわれは簡単につぎのように扱う．すなわち，物質のエネルギー・運動量テンソルの中に，§26 の終わりに述べたように，静止質量密度 μ_0 をもつ“運動学的項” $\mu_0 u^i u^k$ を挿入する．しかしこのような操作は物質を大局的に扱うときにのみ是認されることで，原子や電子自身の体積素片については許されない．いまある座標系を設け，これを基準にしたとき，物質は静止しているとする．そのときは，上に述べたテンソルはただ 1 個の成分 $T^{00}=\mu_0$ だけが 0 でなく，他の成分はすべて 0 となる．そこで断熱的現象にかぎるとき，例えば流体力学では

$$(T_i^k)=\left(\begin{array}{c|ccc} -\mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{array}\right)$$

とおかねばならない．ここで p はどの方向にも等しい値をもつ圧力を示す．断熱過程では，エネルギーの流れは 0 である．このテンソルを任意の座標系を基準として，書きあらわすために，$\mu_0=\mu^*-p$ とおけば，座標系のとりかたによらず，同じ型をもつ関係式

$$T_i^k = \mu^* u_i u^k + p\delta_i^k, \tag{66}$$

または

$$T_{ik} = \mu^* u_i u_k + p g_{ik}$$

を得る．静止質量密度は

$$T_{ik} u^i u^k = \mu^* - p = \mu_0.$$

この μ_0（μ^* ではない）は非圧縮性流体では定数となる．もし流体になんら，外力がはたらかないときは，流体力学的方程式は

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$$

の形に書きあらわされる．

上に述べた流体力学の場合と同様に，弾性体の理論についてもその方程式を相対性原理にかなった形式に，書き下だすことができる [21]．なおこのほかに重力の法則がある．これはもともとのニュートンの形式では，ニュートン－ガリレイの相対性原理と結びついている．それをアインシュタインの相対性原理に適合するように書きかえることはなお残された課題である．しかしこの重力は特に重大な謎を秘めており，それの解決は最後の章において述べられるであろう．

§ 28　ミーの理論

われわれによく知られている電磁場の量だけを用いて，“場の理論”的な物質の理論を創ろうという試みがミーによ

ってなされた [22]．ここで彼の理論の基礎を簡単に説明しよう．なぜなら彼の理論は，物質に対する新しい考えにそった物理学的理論のひとつの例であり，またそれは後ほど役にたつことでもあり，さらに物質の問題をより厳密に公式化するためにも，その手本として知っておくべきものと思う．

ここで理論に登場する状態量は 1）電流の 4 次元的ベクトル密度 $\boldsymbol{s}^i$，（“電荷”）と，2）2 階反対称共変テンソル F_{ik}（“場”）だけであるという立場を固執する．これら両種の量がもともと満足すべき規則は[25)]

$$1)\qquad \frac{\partial \boldsymbol{s}^i}{\partial x^i}=0,$$

$$2)\qquad \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}=0.$$

もし F_{ik} がひとつのベクトル φ_i から

$$3)\qquad F_{ik}=\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}$$

によって導かれるとすれば，方程式 2）は恒等的に（つまりいかなる φ_i に対しても）なりたつ．あるいは逆に 2）から，関係式 3）を満足する φ_i が存在すべきであるという結論が引き出される．同様にもし $\boldsymbol{s}^i$ が 2 階反対称反変テンソル密度 $\boldsymbol{H}^{ik}$ から

25）訳者注：太字は 4 次元世界のテンソル密度を示す．後に時・空分割をして，3 次元空間のベクトルを扱うが，それらは太字の下に ＿ をつけて区別する．

$$4)\qquad \boldsymbol{s}^{i}=\frac{\partial \boldsymbol{H}^{ik}}{\partial x^{k}}$$

によって導かれるものとすれば，1）は $\boldsymbol{H}^{ik}$ がどんなものでも，恒等的に満たされる．あるいは逆に，1）からは，4）を満足する H^{ik} が存在すべきであるという結論が導かれる．4）は形式的にはマックスウェルの方程式の第 2 の組と，その見かけが一致している．ローレンツは，真空中のみならず，電子の内部の領域でも $\boldsymbol{H}^{ik}=\boldsymbol{F}^{ik}$ であると仮定した．しかしわれわれは，ミーに従って，$\boldsymbol{H}$ を単なる F の書き換えとせず，それ自身が物理的に意味のある量で，その成分は，元来の状態量 $\boldsymbol{s}$ および F の普遍的な関数であると仮定する．この結果 φ についても同様の仮定をしなければならない．そこでわれわれの扱う量を表にかけば

φ	F
$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{H}$.

この上の行の二つの量は強度量（Intensitätsgrössen）である．これらは微分関係式 3）で互いに結ばれている．下の行の二つは，密度量（Quantitätsgrössen）で，これらを結びつけるものが微分関係式 4）である．いま時・空分割を行ない，空間に属するベクトル量を太字の下に_をつけて示せば（§21 の記号をそのまま利用する），1）～4）からつぎのような周知の方程式が導かれる：

$$1)\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{s}}=0,$$
$$2)\quad \frac{\partial\underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}+\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{E}}=0,\qquad (\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{B}}=0),$$
$$3)\quad \frac{\partial\underline{\boldsymbol{f}}}{\partial t}+\mathrm{grad}\,\varphi=-\underline{\boldsymbol{E}},\qquad (\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{f}}=\underline{\boldsymbol{B}}),$$
$$4)\quad \frac{\partial\underline{\boldsymbol{D}}}{\partial t}-\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{H}}=-\underline{\boldsymbol{s}},\qquad (\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{D}}=\rho).$$

もし φ_i，$\boldsymbol{H}^{ik}$ が，$\boldsymbol{s}^i, F_{ik}$ のいかなる関数であるかがわかっていれば，10 個の未知量 $\boldsymbol{s}^i, F_{ik}$ に対する 10 個の微分方程式［1)～4) のなかで，（　）の中の関係式はのぞく］を得る．これらは未知量の時間微分と，未知量自身，あるいはそれらの空間的微係数の間の関係を与えるもので，因果律を満足する自然法則の形を備えているものといえる．しかし上述の基礎方程式は，それだけでは，相対性原理の要請を満たさない．相対性原理によれば，むしろ因果律に対立して，時間微分を含まない（　）のなかの“副方程式”も必要となる．しかし相対性原理と因果律の間のこの矛盾は，副方程式が実は余計なものであるという事実により，解消される．なんとなれば，基礎方程式 2), 3) から，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{B}})=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{B}}-\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{f}})=0$$

が導かれる．同様に 1), 4) から

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{D}}).$$

ミーの方程式とローレンツの電子論の基礎方程式との比

較は容易にできる．ローレンツの理論でも 1)，2)，および 4) はそのままでてくる．しかし $\boldsymbol{H}$ と $(\boldsymbol{s}, F)$ のあいだの関係は，ローレンツの場合には $\underline{\boldsymbol{D}}=\underline{\boldsymbol{E}}$，$\underline{\boldsymbol{H}}=\underline{\boldsymbol{B}}$ である．これに対して，φ_i と $(\boldsymbol{s}, F)$ の間の関係は，ローレンツの場合には，φ と $\underline{\boldsymbol{f}}$ を 3) によって $\underline{\boldsymbol{E}}, \underline{\boldsymbol{B}}$ から計算で導くことになる．つまり 3) は φ，$\underline{\boldsymbol{f}}$ の定義式である．したがってこれらのポテンシャルが場の状態量や，電荷によってどのように変化するかを規定する法則が欠けている．そのかわりに，電磁場による力学的な力の公式，およびこの力の作用のもとに電子がいかにふるまうべきかを規定する力学の基本法則がある．しかしわれわれの新しい考えによれば，力学の法則自身も場の方程式から導かれるべきものである．それゆえここにとりあげている新しい立場では，上述の欠けている法則を補充しなければならない．そこでミーは，従来の解釈とちがって，ポテンシャル $\varphi, \underline{\boldsymbol{f}}$ 自身が物理的に意味のある量であると仮定した．この考えを進めるために，まずミーの方程式 3) を力学の基本法則に完全に対応した形式で解釈することにしよう[26)]．つまり 3) の $\underline{\boldsymbol{E}}$ を力学の方程式にでてくる力（ここではこれを“**電気力**”と呼ぶことにする）とみなす．静的な場合には 3) は

$$\underline{\boldsymbol{E}} + \mathrm{grad}\,\varphi = 0 \tag{67}$$

となる．つまりこのときは電気力 $\underline{\boldsymbol{E}}$ と，エーテルの中にお

26) 訳者注：ローレンツの場合のように 3) を $\underline{\boldsymbol{f}}$，$\varphi$ の定義式とは考えず，むしろ物理量 $\underline{\boldsymbol{f}}$ の“運動方程式”とみなす．したがって $\underline{\boldsymbol{E}}$ や $\mathrm{grad}\,\varphi$ は力学の運動方程式の“外力”に相当する．

ける“電気的圧力”$-\varphi$とは釣り合いの状態にあることになる．しかし一般には（67）は0とはならず，これが3）にしたがって“電気的運動量”（$-\underline{\boldsymbol{f}}$）の時間的変化を引きおこす．ミーの理論ではポテンシャルφを電気的圧力とみなしたために，静電気学のはじめにでてくる基礎方程式（67）が，突然，直観的な意味を持つようになったことは一驚に値する．このφこそ，クーロン的斥力に対抗して電子を安定に保つ秘密の鍵となっていた凝集力である．

いままで述べたことは実は，内容のない形式にすぎない．というのは，強度量φ, Fと，密度量$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{H}$を結ぶ普遍的関係をまだ与えてないからである．しかしこの物理系のエネルギー・テンソル密度が，保存則（64）を満足しなければならないという要請により，上に述べた普遍的関数関係をある程度まで，模索的にきめることができる．なぜならば，（64）は，理論と実験の一致を一般的に確立するためのひとつの必要条件であるからである．エネルギー保存則は

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{S}} = 0$$

という形をしている．ここでWはエネルギー密度，$\underline{\boldsymbol{S}}$はエネルギーの流れを示す．マックスウェルの理論では，2）に$\underline{\boldsymbol{H}}$を，4）に$\underline{\boldsymbol{E}}$をかけて加えることにより

$$\underline{\boldsymbol{H}}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} + \underline{\boldsymbol{E}}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{D}}}{\partial t} + \operatorname{div}[\underline{\boldsymbol{E}} \times \underline{\boldsymbol{H}}] = -(\underline{\boldsymbol{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{s}}) \qquad (68)$$

が導かれる．このように右辺には仕事をあらわす項がでてくる．$(\underline{\boldsymbol{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{s}})$は電子の運動エネルギーの増加を引きおこ

す．あるいはわれわれのいまの解釈にしたがえば，電子自身の内部にある場のポテンシャル・エネルギーの増加量を示す．したがってわれわれの解釈によるならば，この項も左辺にある時間微分の項や div の項から作られねばならない．いま，上に述べたような 2),4) に対する扱いと同じように，1),3) を扱えば，つまり 1) には φ をかけ，3) と $\underline{\boldsymbol{s}}$ のスカラー積を作って加えると

$$\varphi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\underline{\boldsymbol{s}}\cdot\frac{\partial\underline{\boldsymbol{f}}}{\partial t}+\mathrm{div}(\varphi\underline{\boldsymbol{s}})=-(\underline{\boldsymbol{E}}\cdot\underline{\boldsymbol{s}}). \qquad (69)$$

そこで (68) から (69) を引けば，エネルギーの保存則が導かれる．その際，エネルギーの流れは

$$\underline{\boldsymbol{S}}=[\underline{\boldsymbol{E}}\times\underline{\boldsymbol{H}}]-\varphi\underline{\boldsymbol{s}}$$

であり，また

$$\delta W=-\varphi\cdot\delta\rho-\underline{\boldsymbol{s}}\delta\underline{\boldsymbol{f}}+\underline{\boldsymbol{H}}\delta\underline{\boldsymbol{B}}+\underline{\boldsymbol{E}}\delta\underline{\boldsymbol{D}}$$

はエネルギー密度の全微分を示す．エネルギーの流れの表式の中に，真空中のそれを示す $[\underline{\boldsymbol{E}}\times\underline{\boldsymbol{H}}]$ のほかに，さらに $-\varphi\underline{\boldsymbol{s}}$ という項が付け加わったことは容易に納得できる．なんとなれば，電子が運動すれば，これにともなって運搬電流 $\underline{\boldsymbol{s}}$ が引きおこされるが，さらに電子にくっついてエネルギーも運搬されるから，$\underline{\boldsymbol{s}}$ に比例したエネルギーの流れが生まれるのは当然である．真空中では，第 1 項の $[\underline{\boldsymbol{E}}\times\underline{\boldsymbol{H}}]$ が重要であるが，電子の内部では第 2 項 $-\varphi\underline{\boldsymbol{s}}$ の方がはるかに大きな値をもつ．エネルギー密度の全微分の表式のなかには独立に変化する状態量として，ρ, $\underline{\boldsymbol{f}}$, $\underline{\boldsymbol{B}}$, $\underline{\boldsymbol{D}}$ が登場する．ここで議論を整理するために，ρ および $\underline{\boldsymbol{D}}$ のかわり

に，それぞれ φ と $\underline{\boldsymbol{E}}$ を独立量として採用する．この結果，全強度量が独立な変数として扱われることになる．そこで

$$\boldsymbol{L} = W - \underline{\boldsymbol{E}} \cdot \underline{\boldsymbol{D}} + \rho\varphi \tag{70}$$

という量を導入する．これの全微分は

$$\delta \boldsymbol{L} = (\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{B}} - \underline{\boldsymbol{D}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{E}}) + (\rho \delta \varphi - \underline{\boldsymbol{s}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{f}})$$

となる．もし $\boldsymbol{L}$ が，強度量 (φ_i, F_{ik}) の関数として与えられていれば，上の式によって，密度量 $(\boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{H}^{ik})$ が (φ, F) の関数として決定される．このようにすれば，10 個の密度量のそれぞれについての普遍的形を与えるかわりに，ただ 1 個の $\boldsymbol{L}$ の関数形を与えるだけで十分である．このような簡素化は，エネルギー保存の原理のおかげである．

4 次元的な書きかたにもどれば，上の変分式は

$$\delta \boldsymbol{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{H}^{ik} \delta F_{ik} - \boldsymbol{s}^i \delta \varphi_i \tag{71}$$

となる．この式から $\delta \boldsymbol{L}$，ならびに $\boldsymbol{L}$ 自身が 4 次元的なスカラー密度であることがわかる．ところで 1 個のベクトル（その成分が φ_i）と，成分 F_{ik} をもつ 1 個の 2 階線形テンソルから作られる最も簡単な不変量は，二式形式であたえられるそれらの“大きさ”である：

a）ベクトル φ_i の大きさ：　$\varphi_i \varphi^i$,

b）テンソル F_{ik} の大きさ：　$\frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} = 2L^0$,

c）4 階線形テンソル $\sum \pm F_{ik} F_{lm}$（$iklm$ のすべての置換について和をとる．ただし偶置換では +，奇置換では − をつける）の大きさ，

d)　ベクトル $F_{ik}\varphi^k$ の大きさ.

3 次元幾何学において最も重要な合同定理によれば，合同なものは同一のものとみなすことにするとき，一対のベクトル $\underline{\boldsymbol{a}}$，$\underline{\boldsymbol{b}}$ は，3 個の不変量 $\underline{\boldsymbol{a}}^2$，$\underline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{b}}$，$\underline{\boldsymbol{b}}^2$ によって完全に決定される．これと同様に 4 次元幾何学でも，ひとつのベクトル φ および，ひとつの 2 階線形テンソル F から作られる図形は，合同なものは同一のものとみなすならば，上に列挙した不変量だけによって完全に決定される．したがって任意の不変量，特にハミルトン関数 L（L は $\boldsymbol{L}$ に対応するスカラーで，$\boldsymbol{L}=\sqrt{g}\cdot L$ で定義される）は，上にならべた 4 個の不変量 a)～d) により代数的に表現されねばならない．したがってミーの理論によれば，物質の問題を解決するということは，この不変関数 L の関数形を決定することに還元される．真空の場合のマックスウェルの理論からは，もちろん，電子の存在を導くことはできないが，このの L を L° とした場合がちょうどマックスウェルの理論に該当する．その意味で，マックスウェルの理論はひとつの特別なケースとしてミーの理論に含まれる．W と $\underline{\boldsymbol{S}}$ を 4 次元的に表現すれば，それらはテンソル密度

$$\boldsymbol{T}_i^k=F_{ir}\boldsymbol{H}^{kr}-\varphi_i\boldsymbol{s}^k-\boldsymbol{L}\delta_i^k \tag{72}$$

の $k=0$ とおいたものの符号を逆にしたもので表わされる．このことから，この $\boldsymbol{T}_i^k$ はエネルギー・運動量テンソル密度の成分であることがわかる．しかも任意の座標系で，これは $i=0$ に対してさきにも述べたように，保存則 (64) を満足している．したがって，これがテンソル密度であるこ

とを考慮すれば，$i=1,2,3$ に対しても（64）が満足されねばならないことになる．なおこのテンソル密度に対応する2階テンソルの反変成分が対称条件 $T^{ik}=T^{ki}$ を満足していることの証明は第 IV 章で与えられる．

場の方程式は，非常に簡単な変分原理，すなわちハミルトンの原理から導くことができる．ここで独立な状態量として再びポテンシャルの成分 φ_i だけを考える．F_{ik} は

$$F_{ik} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}$$

によって**定義**されたものとみなす．理論に登場する不変なハミルトン関数 L は，φ_i および F_{ik} の関数である．そこで流れの密度 $\boldsymbol{s}^i$，およびテンソル密度 $\boldsymbol{H}^{ik}$ を（71）によって定義する．

ある有界な世界領域にわたる不変積分

$$\int \boldsymbol{L}dx \qquad (dx = dx^0 \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3)$$

をこの領域内に在る**全作用量**と呼ぶことにする．ハミルトンの原理によれば，場の量の無限小変分に対して，（ただしこの変分は上述の有界な領域外では0になるものとする）全作用量の変化は0である：

$$\delta\int \boldsymbol{L}dx = \int \delta\boldsymbol{L}dx = 0. \tag{73}$$

この積分は，全世界にわたる積分だとしてもよいし，あるいは場の量の変分が0にならない有界な領域にわたる積分であるとしてもよい（したがって積分領域の外では場の量

の変分は 0 となる)．場の量の変分としては，ポテンシャルの成分の無限小変分 $\delta\varphi_i$，ならびにこれに結びついた F_{ik} の無限小変分

$$\delta F_{ik}=\frac{\partial}{\partial x^i}\delta\varphi_k-\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\varphi_i$$

である．$\delta\boldsymbol{L}$ として (71) を用いると

$$-\delta\boldsymbol{L}=\boldsymbol{s}^i\delta\varphi_i+\boldsymbol{H}^{ik}\frac{\partial\delta\varphi_i}{\partial x^k}.$$

したがって

$$\delta\int\boldsymbol{L}dx=\int\left\{\frac{\partial\boldsymbol{H}^{ik}}{\partial x^k}-\boldsymbol{s}^i\right\}\delta\varphi_i\cdot dx.$$

3) は上の立場では，定義式として用いているから，これが成立することは当然である．そこでハミルトンの原理から導かれるものは 4) である．また 1), 2) は 4), 3) から導かれる．

以上のようにミーの電気力学は最終的には簡単な作用原理 (73) に集約された．――これは力学がその発展の最終段階として作用原理にたどりついたのとよく似ている．しかし力学の場合にはそれぞれ与えられた力学系ごとにひとつのきまった作用関数 L が存在する．その L は与えられた力学系の構造によってきめられる．しかしミーの場合には唯一の L があるのみで，それは世界そのものを対象とする．物質の固有の問題とはまさにここにはじまる．すなわち世界に適合した作用関数，つまり“世界関数” L を決定することが第一の仕事である．しかしわれわれはこれに対して，

いまなお，何の見通しもなく，立ちむかっているのが現状である．もしわれわれが任意にひとつの L を選べば，この作用関数によって支配されるひとつの“可能な”世界をわれわれは手にいれることになる．その世界では，もしわれわれが数学的な解析を十分にやりさえすれば，むしろ現実の世界以上に，すべてのことを完全に理解することができる．このような，あらゆる可能な種々のタイプの世界のなかから，ただひとつの，現実に存在しているわれわれの世界を見つけだすことが，われわれの中心課題である．この現実の世界に適した L は，自然法則に関するわれわれのすべての知識と，L のもつ簡単な数学的特性によって選び出されなければならない．今日，物理学は，場の物理学として，全自然現象を唯一の自然法則に帰着させようとする道をたどって，再びゴールに近づきつつあると信じられているように見える．その昔，ニュートンのプリンキピアにより基礎づけられた力学的質点の物理学はこのゴールに到達したことを祝福した．しかし今日，われわれの木が天にとどくまで伸びつづけることができるかどうか，なお心配は残っている．ミーの理論の基礎になっている状態量だけで，物質をすべて記述するのに十分であるかどうかは，いまのところわれわれにはわからない．また物質が純粋に電気的性質のものであるかどうかもわれわれにはわからない．特に，われわれが作用量子の助けをかりて一時しのぎにどうにか処理している多くの現象が物理学的知識の世界に暗い雲となって覆いかぶさっている今日，どのような新しい革

命がこの物理学の世界に起ころうとしているか何人にもわからない.

ここで L として

$$L = \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} + w(\sqrt{-\varphi_i \varphi^i}) \tag{74}$$

とおいた場合を研究してみよう. w は1個の変数のひとつの関数を示す. この L はマックスウェルの理論を一般化したもののなかで最も簡単なものである. ——現実の世界の世界関数がこのような形をもつということに対してもちろん, なんらの根拠もない. ここで簡単のために静的な解についてだけ考えてみよう. 静的な場合とは

$$\underline{\boldsymbol{B}} = \underline{\boldsymbol{H}} = 0, \qquad \underline{\boldsymbol{s}} = \underline{\boldsymbol{f}} = 0$$

のことである. そこで

$$\underline{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{grad}\,\psi, \qquad \mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{D}} = \rho$$

$$\underline{\boldsymbol{D}} = \underline{\boldsymbol{E}}, \qquad \rho = -w'(\varphi).$$

w' とは w の微分を示す. 真空中における普通の静電気学の場合と異なり, ここでは電荷密度 ρ はポテンシャル φ (つまり電気的圧力) のひとつの普遍的関数で表わされる. この φ はポアッソンの方程式

$$\Delta\varphi = w'(\varphi) \tag{75}$$

で与えられる. もし $w(\varphi)$ が φ の偶関数でなければ, (75) は φ を $-\varphi$ におきかえるとき, その形が不変にたもたれない. このことは**電荷の正負の間の本質的な差違**を説明していることになろう. もちろんこのことは非静的場に対して,

ひとつの著しい困難を引きおこす．電荷には必ず正負の両方が存在しなければならないから，場の種々の場所で（74）の中にある$\sqrt{}$は異なる符号をもたねばならない．したがって正の値をもつ所と負の場所の境界には必ず$\varphi_i\varphi^i=0$となる場所が存在するはずである．そのような点の近くでは$\varphi_i\varphi^i$は必然的に正ならびに負の値を持つはずである［静電場のときは$(\varphi_0)^2$の極小値は0であって，負の値はでてこない．しかし非静的場の場合，すなわち$\varphi_i\varphi^i$の時には，極小値は存在しない］．したがってわれわれの場の方程式の解は部分的に虚数となるであろう．この推論によれば場はいくつかの領域に分れ，各領域ではただ1種類の電荷が存在し，また各領域どうしは，場の値が虚数となる領域によって，互いに分離されることになろう．このような場の分割が何を意味するかは簡単には答えられない．

（75）の解で，無限遠で0となるものは電荷のひとつの可能な平衡状態を表わす，すなわち世界におけるひとつの存在可能な粒子の状態を表現する．そこでこれからそのような解を求めよう．この平衡状態は，解が球対称のときに限って安定となる．球対称の場合にはφは座標原点（そこに粒子の中心が静止しているものとする）からの距離rだけの関数となるから，その方程式は

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=w'(\varphi) \tag{76}$$

となる．（76）が，$r\to\infty$でも正則な解

$$\varphi = \frac{e_0}{r} + \frac{e_1}{r^2} + \cdots \tag{77}$$

を持つとすれば，これを（76）の左辺に代入し，さらに $w'(\varphi)$ も r の冪(べき)に展開したとき，$w'(\varphi)$ は r^{-4}，あるいはもっと高次の負冪(べき)の項からはじまることがわかる．

このことは $w(x)$ が $x=0$ の近傍で，x^5 の程度の量であるべきことを示している．このような前提のもとには，（76）は $r=0$ で正則な解を ∞^1 個，また $r=\infty$ で正則な解も ∞^1 個持つことがわかる．したがって，一般的にいって，これら 2 組の一次元的連続無限個の解の集団（これは 2 個の積分定数をもつ（76）の解の 2 次元的集団の部分集団である）は有限個，あるいは可付番無限個の解を共有すると考えられる．両集団に同時に所属するこのような解は種々の可能な粒子状態（たとえば電子とか原子核の構成粒子）を表わすであろう．もちろんこの世界にはただ 1 個の電子，あるいは原子核が存在しているわけではなく，同時に多数の電子や原子核が併存している．しかしこれらの粒子間の距離は，各粒子自身の固有の拡がりの大きさに比べれば，非常に大きいと考えられる．したがって個々の電子や原子核の内部における場の様子は粒子どうしの間の相互作用によってはなんら，本質的影響をうけないとしてよい．いま φ は，粒子を表わす（76）のひとつの解（77）であるとする．その場合には，全電荷は

$$= -4\pi \int_0^\infty w'(\varphi) r^2 dr = -4\pi \cdot \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right)_{r=\infty} = 4\pi e_0$$

となる．またその質量はエネルギー密度 W の積分として与えられる．それは（70）から

$$
\text{質量} = 4\pi\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 + w(\varphi) + \varphi w'(\varphi)\right\} r^2 dr
$$
$$
= 4\pi\int_0^{\infty}\left\{w(\varphi) + \frac{1}{2}\varphi w'(\varphi)\right\} r^2 dr.
$$

そこで，われわれは自然法則自身から電子の質量，およびその電荷，また現存する個々の原子核（元素）の質量や電荷を算出することができる．物質の窮極的な構成要素であるこれらの粒子については，従来は，与えられた質量や電荷をもった粒子としてその存在が仮定されておった．世界関数 L がわれわれにとって未知なものであるかぎり，ここに述べた理論は，さしあたっては，ひとつのプログラムにとどまる．上に述べた例の基礎となった（74）という特別な仮定は，世界関数についての知識が，物質やその構造に関して，いかに深い，根本的な，また法則に立脚した理解をわれわれにもたらすかを明らかにするのに役立つ．任意にえらばれた仮定をもとに，これ以上，議論をおしすすめることは無用である．むしろハミルトン関数の正しい決定を啓示するような新しい物理学的洞察と原理を見つけることがいま最も必要なことである．

この章でわれわれが獲得することのできた最も大きな知識は，“現実”という劇が演じられる舞台は，3 次元ユーク

リッド空間ではなくて４次元世界であるということである．そこでは空間と時間が不可分の形で統合されている．われわれの日常生活にとっては，空間の直観的本質と時間のそれとの間の相違は非常に大きなものである．しかし，物理学がわれわれの直接の経験から大きな努力を払って抽出した客観的世界では，時間と空間の間にはなんらの定性的差異もない．それはひとつの４次元連続体であり，“空間”でもないし，また“時間”でもない．ただ世界の中のある一部分を通過するわれわれの意識だけが世界のある断面に遭遇する．この断面はわれわれの意識を出迎え，意識のあとに歴史として残る．つまり時間的発展の中において把握され，空間の中において演じられたひとつの過程として意識の通りすぎた後に残る．

この４次元世界は，ちょうどユークリッド空間に距離の定義が与えられているように，それもまたひとつの４次元計量空間である．しかしユークリッド空間とは異なり，その距離を定義する基本二次形式は正定符号ではなく，ひとつの負次元をもつ．このことは数学的には重要なことではないが，現実世界にとって，またその作用の伝播にとっては，非常に重要な意味をもつ．この４次元世界の本当の理解と，そのもたらす意義を把握するためには，数学的に見てきわめて簡単な，この４次元計量空間という考えを，単にそれだけとして孤立してとりあげても何もならない．むしろ物理的な諸現象の理解にとって，４次元世界という考えかたがどのような重要な効果をもたらすかを追求するこ

とこそ大切である．これについて本章では，できるだけ簡単にその説明がなされた．静的世界における3次元的幾何学は，すでにユークリッドによりひとつの完全な公理系の形にまとめられた．この幾何学がわれわれにとってかくも明快な性格のものであることはひとつの驚異である．これに反して4次元幾何学は，ねばり強い努力により，また広範な，物理的，経験的材料を通してようやくわれわれの手中におさめることができるようになった．相対性理論によりはじめて，われわれの自然確認は世界の中におこる運動や変化という事実を正しく把握することができるようになった（というべきであろう）．

本書は、一九七三年六月二十八日、講談社より刊行された。

マッハ力学史（上）
エルンスト・マッハ
岩野秀明 訳

古典力学はどこまで科学的か？　反形而上学的立場からの根源的検証。アインシュタインの相対性理論を胚胎していた、ニュートン力学批判の古典。

マッハ力学史（下）
エルンスト・マッハ
岩野秀明 訳

時代を魅了したマッハ哲学の魅力とは？　思惟経済説とは？　科学が哲学を凌駕し始めた世紀の、古典力学を通して考察された認識論。上・下巻。

位相のこころ
森　毅

微分積分などでおなじみの極限や連続などは、20世紀数学でどのように厳密に基礎づけられたのか。「どんどん」近づける構造のしくみを探る。

現代の古典解析
森　毅

おなじみ一刀斎の秘伝公開！　極限と連続に始まり、指数関数と三角関数を経て、偏微分方程式に至る。見晴らしのきく、読み切り22講義。

角の三等分
矢野健太郎
一松信 解説

コンパスと定規だけで角の三等分は「不可能」！　なぜ？　古代ギリシアの作図問題の核心を平明懇切に解説し「ガロア理論入門」の高みへと誘う。

思想の中の数学的構造
山下正男

レヴィ＝ストロースと群論？　ニーチェやオルテガの遠近法主義、ヘーゲルと解析学、孟子と関数概念……。数学的アプローチによる比較思想史。

新版 電子と原子核の発見
S・ワインバーグ
本間三郎 訳

電子の発見に始まる20世紀素粒子物理学の考え方と実験を、具体的にわかりやすく解説したノーベル賞学者による定評ある入門書。写真・図版多数。

一般相対性理論　P・A・M・ディラック　江沢洋訳

一般相対性理論の核心に最短距離で到達すべく、卓抜した数学的記述で簡明直截に書かれた天才ディラックによる入門書。詳細な解説を付す。

不完全性定理　野﨑昭弘

事実・推論・証明…。理屈っぽいとケムたがられる話題を、なるほどと納得させながら、ユーモアたっぷりにひもといたゲーデルへの超入門書。

数学的センス　野﨑昭弘

美しい数学とは詩なのです。いまさら数学者にはなれないけれどそれを楽しめたら…。そんな期待に応えてくれる心やさしいエッセイ風数学再入門。

幾何学基礎論　D・ヒルベルト　中村幸四郎訳

20世紀数学全般の公理化への出発点となった記念碑的著作。ユークリッド幾何学を根源まで遡り、斬新な観点から厳密に基礎づける。（佐々木力）

数のエッセイ　一松信

完全数、友愛数やπのコンピュータ数値計算などからタイル張りまで。エスプリのきいた語り口でエレガントな世界に誘う異色の数学エッセイ。

ブルバキ数学史（上）　ニコラ・ブルバキ　村田全／清水達雄／杉浦光夫訳

「構造」の観点から20世紀の数学全体を基礎づけ直したブルバキの理念を、凝縮した形で通覧できる異色の数学史。3篇を増補した決定版文庫。上下巻。

ブルバキ数学史（下）　ニコラ・ブルバキ　村田全／清水達雄／杉浦光夫訳

数学の各理論の指導的理念や展開過程を、膨大な史料原典を駆使して、背後にある思考様式や哲学を含め考察。「構造主義」哲学の重要な文献。

素粒子と物理法則　R・P・ファインマン／S・ワインバーグ　小林澈郎訳

量子論と相対論を結びつけるディラックのテーマを対照的に展開したノーベル賞学者による追悼記念講演。現代物理学の本質を堪能させる三重奏。

πの歴史　ペートル・ベックマン　田尾陽一／清水韶光訳

円周率だけでなく意外なところに顔をだすπ。ユークリッドやアルキメデスによる探究の歴史に始まり、オイラーの発見したπの不思議にいたる。

ユダヤ戦記3　フラウィウス・ヨセフス　秦剛平訳

ユダヤ人の聖性が宿る都エルサレムと神殿を失ったのに、彼らの神は沈黙を守る。そして二〇〇〇年にわたる流浪が始まった。全三巻完結。

新訂 都名所図会（全5巻・分売不可）　市古夏生　鈴木健一　校訂

一七八〇年に刊行された京都名所案内。俳諧師秋里籬島文。写生による鳥瞰図風の多数の精密画が大評判となり、名所図会ものの嚆矢となった。

フェルマーの大定理　足立恒雄

ついに証明されたフェルマーの大定理。その美しき頂への峻厳な道のりを、クンマーや日本人数学者の貢献を織り込みつつ解き明かした整数論史。

$\sqrt{2}$の不思議　足立恒雄

$\sqrt{2}$とは？　見えてはいるけれどないもの。ないようであるもの。納得しがたいその深淵に、ギリシア人は慄いた。抽象思考の不思議をひもとく！

偉大な数学者たち　岩田義一

君たちに数学者たちの狂熱を見せてあげよう！　ガウス、オイラー、アーベル、ガロア……。少年たちに数学への夢をかきたてた名著の復刊。（高瀬正仁）

算法少女　遠藤寛子

父から和算を学ぶ町娘あきは、算額に誤りを見つけ声を上げた。と、若侍が…。和算への誘いとして定評の少年少女向け歴史小説。箕田源二郎・絵

数学史入門　佐々木力

古代ギリシャやアラビアに発する微分積分学のダイナミックな形成過程を丹念に跡づけ、数学史の醍醐味をわかりやすく伝える書き下ろし入門書。

宇宙をかき乱すべきか（上）　F・ダイソン　鎮目恭夫訳

若くして相対性理論と量子力学を統合する方程式を発見した物理学の巨人の自伝。芸術、宗教、哲学を含みこんだ壮大なヴィジョンが展開する。

宇宙をかき乱すべきか（下）　F・ダイソン　鎮目恭夫訳

ファインマン、オッペンハイマー等との交流。ヒトという種の未来を宇宙論的視野から考察した人間と科学との関係など。科学教養書の新しい古典。

ユダヤ古代誌（全6巻）　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

対ローマ・ユダヤ戦争を経験したヨセフスが説き起こす、天地創造からイエスの時代をへて同時代（紀元後一世紀）までのユダヤの歴史。

ユダヤ古代誌1　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

天地創造から始祖アブラハムの事蹟へ、イサク、ヤコブ、ヨセフの物語から偉大な指導者モーセのカナン到着までを語る、旧約時代篇の冒頭巻。

ユダヤ古代誌2　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

カナン征服から、サムソン、ルツ、サムエルの物語を追い、サウルによるユダヤ王国の誕生、ダビデ、ソロモンの黄金時代を叙述して歴史時代へ。

ユダヤ古代誌3　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

ソロモンの時代が終わり、ユダヤ王国は分裂する。バビロン捕囚によって王国が終焉するまでの歴史を一望し、アレクサンダー大王の時代に至る。

ユダヤ古代誌4　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

アレクサンドリアにおける聖書の翻訳から、マッカバイオス戦争を経て、アサモナイオス朝の終焉までのヘレニズム時代。新約世界のはじまり。

ユダヤ古代誌5　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

ヘロデによる権力確立（前三七－二五年）から、その全盛時代（前二五－一三年）を経て、彼の死後の混乱、イエス生誕のころまでを描く。

ユダヤ古代誌6　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

ユダヤがローマの属州となった後六年からアグリッパス一世の支配（後四一－四四年）を経て、第一次ユダヤ戦争勃発（後六六年）までの最終巻。

ユダヤ戦記1（全3巻）　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

パレスチナを舞台とし、ローマ帝国を相手にしたユダヤ戦争（紀元六六—七〇年）の狂気と無謀の詳細な記録。第一巻は戦いにいたるまでの経緯。

ユダヤ戦記2　フラウィウス・ヨセフス　秦　剛平　訳

圧倒的な軍事力のローマ軍。ウェスパシアノスのガリラヤ侵攻、ヨタパタの攻防戦でヨセフスが捕虜となり、ユダヤの民の不安と絶望の日々が続く。

ちくま学芸文庫

空間・時間・物質 上

二〇〇七年四月十日　第一刷発行

著者　ヘルマン・ワイル
訳者　内山龍雄（うちやま・りょうゆう）
発行者　菊池明郎
発行所　株式会社　筑摩書房
東京都台東区蔵前二―五―三　〒一一一―八七五五
振替〇〇一六〇―八―四一二三
装幀者　安野光雅
印刷所　大日本法令印刷株式会社
製本所　株式会社鈴木製本所

乱丁・落丁本の場合は、左記宛に御送付下さい。
送料小社負担でお取り替えいたします。
ご注文・お問い合わせも左記へお願いします。
筑摩書房サービスセンター
埼玉県さいたま市北区櫛引町二―六〇四　〒三三一―八五〇七
電話番号　〇四八―六五一―〇〇五三
© TETSUSHIN UCHIYAMA/NORIKO TAKEI 2007
Printed in Japan
ISBN978-4-480-09061-4　C0142